

16.15 1)

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$, θα πρέπει σημείο $(0, 0)$ να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

Επομένως θα πρέπει

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0) = x_0^2 - 3x_0 + 1 \\ f(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 - 3 \end{matrix} \Rightarrow -(x_0^2 - 3x_0 + 1) = (2x_0 - 3)(-x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_0^2 + 3x_0 - 1 = -2x_0^2 + 3x_0 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_0 = \pm 1}$$

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $(0, 0)$, οι οποίες εφάπτονται στα σημεία της C_f με τετμημένες $x_{01} = -1$ και $x_{02} = 1$ οπότε έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \quad \begin{matrix} f(-1) = 5, f'(-1) = -5 \end{matrix} \Rightarrow y - 5 = -5(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = -5x}$$

και

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad \begin{matrix} f(1) = -1, f'(1) = -1 \end{matrix} \Rightarrow y + 1 = -1(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

16.15 2)

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από το σημείο $(3, 8)$, θα πρέπει σημείο $(3, 8)$ να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

Επομένως θα πρέπει

$$8 - f(x_0) = f'(x_0)(3 - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0) = x_0^2 \\ f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 \end{matrix} \Rightarrow 8 - x_0^2 = 2x_0(3 - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - x_0^2 = 6x_0 - 2x_0^2 \Rightarrow x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow x_{01} = 2 \\ \searrow x_{02} = 4 \end{matrix}$$

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $(3, 8)$, οι οποίες εφάπτονται στα σημεία της C_f με τετμημένες $x_{01} = 2$ και $x_{02} = 4$ οπότε έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad \begin{matrix} f(2) = 4, f'(2) = 4 \end{matrix} \Rightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 4x - 4}$$

και

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \quad \begin{matrix} f(4) = 16, f'(4) = 8 \end{matrix} \Rightarrow y - 16 = 8(x - 4) \Rightarrow \boxed{y = 8x - 16}$$

16.15 3)

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από το σημείο $(2,7)$, θα πρέπει σημείο $(2,7)$ να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

Επομένως θα πρέπει

$$7 - f(x_0) = f'(x_0)(2 - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0) = x_0^2 + x_0 + 2 \\ f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 + 1 \end{matrix} \Rightarrow 7 - (x_0^2 + x_0 + 2) = (2x_0 + 1)(2 - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 - x_0^2 - x_0 - 2 = 4x_0 - 2x_0^2 + 2 - x_0 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \quad \Delta = 4, \quad x_{01,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} \nearrow x_{01} = 1 \\ \searrow x_{02} = 3 \end{matrix}$$

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $(2,7)$, οι οποίες εφάπτονται στα σημεία της C_f με τετμημένες $x_{01} = 1$ και $x_{02} = 3$ οπότε έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad \begin{matrix} f(1) = 4, f'(1) = 3 \end{matrix} \Rightarrow y - 4 = 3(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 3x + 1}$$

και

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \quad \begin{matrix} f(3) = 14, f'(3) = 7 \end{matrix} \Rightarrow y - 14 = 7(x - 3) \Rightarrow \boxed{y = 7x - 7}$$

16.15 4)

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από το σημείο $(2,8)$, θα πρέπει σημείο $(2,8)$ να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

$$\text{Επομένως θα πρέπει } 8 - f(x_0) = f'(x_0)(2 - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0) = x_0^3 \\ f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2 \end{matrix} \Rightarrow 8 - x_0^3 = 3x_0^2(2 - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - x_0^3 = 6x_0^2 - 3x_0^3 \Rightarrow 2x_0^3 - 6x_0^2 + 8 = 0 \Rightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0 \quad \begin{matrix} \text{παραγοντοποίηση} \\ \text{με Horner} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{01} = -1 \quad \text{ή} \quad x_{02} = 2$$

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $(2,8)$, οι οποίες εφάπτονται στα σημεία της C_f με τετμημένες $x_{01} = -1$ και $x_{02} = 2$ οπότε έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \quad \begin{matrix} f(-1) = -1, f'(-1) = 3 \end{matrix} \Rightarrow y + 1 = 3(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 3x + 2}$$

και

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad \begin{matrix} f(2) = 8, f'(2) = 12 \end{matrix} \Rightarrow y - 8 = 12(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 12x - 16}$$

16.15 5)

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από το σημείο $(0,-3)$, θα πρέπει σημείο $(0,-3)$ να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

Επομένως θα πρέπει

$$\begin{aligned} -3 - f(x_0) &= f'(x_0)(0 - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0)=x_0^4 \\ f'(x)=4x^3 \Rightarrow f'(x_0)=4x_0^3 \end{matrix} \Rightarrow -3 - x_0^4 = 4x_0^3(-x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow -3 - x_0^4 &= -4x_0^4 \Rightarrow 3x_0^4 = 3 \Rightarrow x_0^4 = 1 \Rightarrow x_{01} = -1 \text{ ή } x_{02} = 1 \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $(0, -3)$, οι οποίες εφάπτονται στα σημεία της C_f με τετμημένες $x_{01} = -1$ και $x_{02} = 1$ οπότε έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \quad \begin{matrix} f(-1)=-1, f'(-1)=-4 \end{matrix} \Rightarrow y - 1 = -4(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = -4x - 3}$$

και

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad \begin{matrix} f(1)=1, f'(1)=4 \end{matrix} \Rightarrow y - 1 = 4(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 4x - 3}$$

16.15 6)

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα πρέπει σημείο $(0, 0)$ να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

$$\begin{aligned} \text{Επομένως θα πρέπει } 0 - f(x_0) &= f'(x_0)(0 - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0)=e^{x_0} \\ f'(x)=e^x \Rightarrow f'(x_0)=e^{x_0} \end{matrix} \Rightarrow 0 - e^{x_0} = e^{x_0}(-x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\cancel{e^{x_0}} &= -x_0 \cancel{e^{x_0}} \Rightarrow x_0 = 1 \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει μία εφαπτόμενη που διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$, η οποία εφάπτεται στο σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = 1$ οπότε έχει αντίστοιχα εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad \begin{matrix} f(1)=e, f'(1)=e \end{matrix} \Rightarrow y - e = e(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = ex}$$

16.15 7)

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα πρέπει σημείο $(0, 0)$ να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

Επομένως θα πρέπει

$$\begin{aligned} 0 - f(x_0) &= f'(x_0)(0 - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0)=\frac{1+\ln x_0}{x_0} \\ f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-1-\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x_0)=\frac{-\ln x_0}{x_0^2} \end{matrix} \Rightarrow 0 - \frac{1+\ln x_0}{x_0} = \frac{-\ln x_0}{x_0^2}(-x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1+\ln x_0}{x_0} &= \frac{-\ln x_0}{x_0^2}(-\cancel{x_0}) \Rightarrow -\frac{1+\ln x_0}{\cancel{x_0}} = \frac{\ln x_0}{\cancel{x_0}} \Rightarrow -1 - \ln x_0 = \ln x_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \ln x_0 &= 1 \Rightarrow \ln x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει μία εφαπτόμενη που διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$, η οποία εφάπτεται

στο σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = e^{\frac{1}{2}}$

16.15 8)

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από το σημείο $(0, 8)$, θα πρέπει σημείο $(0, 8)$ να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

$$\begin{aligned} \text{Επομένως θα πρέπει } 8 - f(x_0) &= f'(x_0)(0 - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0) = x_0^4 - 6x_0^2 + 8 \\ f'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow f'(x_0) = 4x_0^3 - 12x_0 \end{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow 8 - (x_0^4 - 6x_0^2 + 8) &= (4x_0^3 - 12x_0)(-x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow 8 - x_0^4 + 6x_0^2 - 8 &= -4x_0^4 + 12x_0^2 \Rightarrow 3x_0^4 - 6x_0^2 = 0 \Rightarrow 3x_0^2(x_0^2 - 2) = 0 \Rightarrow \\ 3x_0^2(x_0 - \sqrt{2})(x_0 + \sqrt{2}) &= 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = \sqrt{2} \text{ ή } x_0 = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν τρεις εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $(0, 8)$, οι οποίες εφάπτονται στα σημεία της C_f με τετμημένες $x_{01} = 0$, $x_{02} = \sqrt{2}$ και $x_{03} = -\sqrt{2}$

16.15 9)

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από το σημείο (a, λ) , θα πρέπει σημείο (a, λ) να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

$$\begin{aligned} \text{Επομένως θα πρέπει } \lambda - f(x_0) &= f'(x_0)(a - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0) = x_0^2 \\ f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 \end{matrix} \Rightarrow \lambda - x_0^2 = 2x_0(a - x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda - x_0^2 &= 2ax_0 - 2x_0^2 \Rightarrow x_0^2 - 2ax_0 + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 4a^2 - 4\lambda = 4(a^2 - \lambda) \stackrel{\lambda < a^2}{>} 0$ άρα έχει δύο λύσεις

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο (a, λ) , οι οποίες εφάπτονται στα σημεία της C_f με τετμημένες που είναι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης