

16.13 1)

Αρχικά θα βρούμε που τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των f και g λύνοντας το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -x^2 + 5x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = -x^2 + 5x - 3 \\ y = -x^2 + 5x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \\ y = -x^2 + 5x - 3 \end{cases} \xrightarrow[\text{με Horner}]{\text{παραγοντοποίηση}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x+3) = 0 \\ y = -x^2 + 5x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ή } x = -3 \\ y = -x^2 + 5x - 3 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 1) \text{ ή } (x, y) = (-3, -27)$$

Οπότε οι συναρτήσεις f και g τέμνονται στα σημεία $(1, 1)$ και $(-3, -27)$

Αλλά

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3 \\ g'(x) = -2x + 5 \Rightarrow g'(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f'(1) = g'(1)}$$

Που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο $(1, 1)$ που σημαίνει ότι εφάπτονται

Παρατήρηση: Στο σημείο $(-3, 27)$ δεν έχουν κοινή εφαπτόμενη διότι $f'(-3) = 27$ και $g'(-3) = 11$

16.13 2)

Αρχικά θα βρούμε που τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των f και g λύνοντας το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 2 \\ y = 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = x^2 + 3x - 2 \\ y = 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Οπότε οι συναρτήσεις f και g τέμνονται στο $(1, 2)$

Αλλά

$$\begin{cases} f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(1) = 5 \\ g'(x) = 4x + 1 \Rightarrow g'(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f'(1) = g'(1)}$$

Που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο $(1, 2)$ που σημαίνει ότι εφάπτονται

16.13 3)

Η συνάρτηση f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$ $\overset{f(0)=(0+\alpha)^2+\beta-\alpha^2=\beta}{=} (0, \beta)$

Το σημείο $(0, \beta)$ ικανοποιεί και την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon: y = 2\alpha x + \beta$ άρα η ευθεία $\varepsilon: y = 2\alpha x + \beta$ τέμνει την γραφική παράσταση της f στο σημείο $(0, \beta)$

Όμως $f'(x) = 2(x + \alpha) \Rightarrow \boxed{f'(0) = 2\alpha = \lambda_\varepsilon}$, που σημαίνει ότι η ευθεία ε εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $(0, \beta)$ δηλαδή στο σημείο τομής με τον άξονα $y'y$.