

16.12 1)

Καταρχήν $f'(x) = 3x^2 + \alpha$ και $g'(x) = 2x$

Ακόμη

Επειδή οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ θα ισχύει

$$\boxed{f(1) = g(1)} \quad \text{και} \quad \boxed{f'(1) = g'(1)}$$

Οπότε

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^3 + \alpha \cdot 1 + \beta = 1^2 + 1 \\ 3 \cdot 1^2 + \alpha = 2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\beta = 2} \\ \boxed{\alpha = -1} \end{cases}$$

16.12 2)

Καταρχήν $f'(x) = \ln x + 1$ και $g'(x) = 2\alpha x + \beta$

Ακόμη

Επειδή οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ θα ισχύει

$$\boxed{f(1) = g(1)} \quad \text{και} \quad \boxed{f'(1) = g'(1)}$$

Οπότε

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot \ln 1 = \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + 1 \\ \ln 1 + 1 = 2\alpha \cdot 1 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε $\boxed{\alpha = 2}$ και $\boxed{\beta = -3}$

16.12 3)

Καταρχήν $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$ και $g'(x) = 2x - 2$

Ακόμη

Επειδή οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = -1$ θα ισχύει

$$\boxed{f(-1) = g(-1)} \quad \text{και} \quad \boxed{f'(-1) = g'(-1)}$$

και επειδή έχουν παράλληλες εφαπτόμενες στο $x_0 = 3$ θα ισχύει $\boxed{f'(3) = g'(3)}$

Οπότε

$$\begin{cases} f(-1) = g(-1) \\ f'(-1) = g'(-1) \\ f'(3) = g'(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^3 + \alpha(-1)^2 + \beta(-1) + \gamma = (-1)^2 - 2(-1) + 3 \\ 3 \cdot (-1)^2 + 2\alpha \cdot (-1) + \beta = 2(-1) - 2 \\ 3 \cdot 3^2 + 2\alpha \cdot 3 + \beta = 2 \cdot 3 - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + \alpha - \beta + \gamma = 1 + 2 + 3 \\ 3 - 2\alpha + \beta = -2 - 2 \\ 27 + 6\alpha + \beta = 6 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 7 \\ -2\alpha + \beta = -7 \\ 6\alpha + \beta = -23 \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε $\boxed{\alpha = -2}$, $\boxed{\beta = -11}$ και $\boxed{\gamma = -2}$

