

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

16.1 1)

α) Είναι

$$f(3) = 3^2 - 3 \Rightarrow f(3) = 6 \quad (1) \quad \text{και} \quad f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} y - 6 = 5(x - 3) \Rightarrow y - 6 = 5x - 15 \Rightarrow y = 5x - 9$$

β) Παρατηρούμε ότι $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x \leq 3 \\ x - 3, & x > 3 \end{cases}$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x + 3 - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3 - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)}{x - 3} = 1$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ και άρα δεν δέχεται εφαπτομένη

16.1 2)

$$\text{Είναι } f(-2) = -2 - 2 = -4 \quad (1) \quad \text{και } f'(x) = 1 \Rightarrow f'(-2) = 1 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} y + 4 = 1 \cdot (x + 2) \Rightarrow y + 4 = x + 2 \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$$

16.2 3)

$$\text{Είναι } f(2) = 2^4 = 16 \quad (1) \quad \text{και } f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(2) = 4 \cdot 2^3 = 32 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} y - 16 = 32 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 16 = 32x - 64 \Rightarrow \boxed{y = 32x - 48}$$

16.1 4)

$$\text{Είναι } f(1) = 1^2 + 1 = 2 \quad (1) \quad \text{και } f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

16.1 5)

$$\text{Είναι } f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 2 = -1 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = 4x + 1 \Rightarrow f'(-1) = 4 \cdot (-1) + 1 = -3 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} y + 1 = -3 \cdot (x + 1) \Rightarrow y + 1 = -3x - 3 \Rightarrow \boxed{y = -3x - 4}$$

16.1 6)

$$\text{Είναι } f(0) = 0^2 + 0 - 1 = -1 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y + 1 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y + 1 = x \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$$

16.1 7)

$$\text{Είναι } f(0) = 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 7 = -7 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + 6 = 6 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y + 7 = 6 \cdot (x - 0) \Rightarrow y + 7 = 6x \Rightarrow \boxed{y = 6x - 7}$$

16.1 8)

$$\text{Είναι } f(0) = 3 \cdot 0^3 - 0 - 5 = -5 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = 9x^2 - 1 \Rightarrow f'(0) = 9 \cdot 0^2 - 1 = -1 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y + 5 = -1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y + 5 = -x \Rightarrow \boxed{y = -x - 5}$$

16.1 9)

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{f(0)=0}{\underset{|x|=-x}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 3x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(2x + 3)}{\cancel{x}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{f(0)=0}{\underset{|x|=x}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - 3x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(2x - 3)}{\cancel{x}} = -3$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και άρα δεν δέχεται εφαπτόμενη

16.1 10)

$$\text{Είναι } f(1) = \frac{1+1}{1} = 2 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = \frac{x - (x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = -x + 1 \Rightarrow \boxed{y = -x + 3}$$

16.1 11)

$$\text{Είναι } f(-1) = \frac{-1-2}{-1} = 3 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = \frac{x - (x-2)}{x^2} = \frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{2}{(-1)^2} = 2 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Rightarrow y - 3 = 2 \cdot (x+1) \Rightarrow y - 3 = 2x + 2 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 5}$$

16.1 12)

$$\text{Είναι } f(0) = \frac{0}{0-1} = 0 \quad (1)$$

και

$$f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1 \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x-0) \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

16.1 13)

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{f(0)=1}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και άρα δεν δέχεται εφαπτόμενη

16.1 14)

$$\text{Είναι } f(1) = \frac{3 \cdot 1 - 2}{1+1} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

και

$$f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-2)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{5}{4} \quad (2)$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \cdot (x-1) \Rightarrow 4y - 2 = 5x - 5 \Rightarrow \boxed{5x - 4y - 3 = 0}$$