

α) Ευθύ

Έστω ότι ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα του πολωνύμου $P(x)$ και της παραγώγου του $P'(x)$ τότε $P(\rho) = P'(\rho) = 0$

Ακόμη επειδή ο ρ είναι ρίζα του πολωνύμου $P(x)$ από την θεωρία των πολωνύμων ξέρουμε ότι το $x - \rho$ θα είναι παράγοντας του $P(x)$ δηλαδή θα ισχύει

$$P(x) = (x - \rho)\Pi(x) \quad (1)$$

όπου $\Pi(x)$ είναι επίσης πολώνυμο. Οπότε

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \rho)\Pi(x) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} P'(x) = (x - \rho)' \Pi(x) + (x - \rho)\Pi'(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P'(x) = \Pi(x) + (x - \rho)\Pi'(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=\rho} P'(\rho) = \Pi(\rho) + (\rho - \rho)\Pi'(\rho) \xrightarrow{P'(\rho)=0} \\ &\Rightarrow \boxed{\Pi(\rho) = 0} \end{aligned}$$

Οπότε ο ρ είναι ρίζα του πολωνύμου $\Pi(x)$ άρα το $x - \rho$ θα είναι παράγοντας και του $\Pi(x)$ δηλαδή θα ισχύει

$$\Pi(x) = (x - \rho)Q(x) \quad (2)$$

όπου $Q(x)$ είναι επίσης πολώνυμο. Οπότε

$$(1), (2) \Rightarrow P(x) = (x - \rho)(x - \rho)Q(x) \Rightarrow P(x) = (x - \rho)^2 Q(x)$$

Αντίστροφο

Έστω ότι ο ρ είναι διπλή ρίζα του $P(x)$. Τότε το $(x - \rho)^2$ θα είναι παράγοντας του $P(x)$ δηλαδή θα ισχύει

$$P(x) = (x - \rho)^2 \Pi(x) \quad (1)$$

όπου $\Pi(x)$ είναι επίσης πολώνυμο. Οπότε

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \rho)^2 \Pi(x) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} P'(x) = 2(x - \rho)\Pi(x) + (x - \rho)^2 \Pi'(x) \Rightarrow \\ &\xrightarrow{\text{θέτουμε } x=\rho} P'(\rho) = 2(\rho - \rho)\Pi(\rho) + (\rho - \rho)^2 \Pi'(\rho) \Rightarrow \boxed{P'(\rho) = 0} \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ο ρ είναι ρίζα και της παραγώγου $P'(x)$

β) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα το πολώνυμο $P(x)$ θα διαιρείται με το $(x - 1)^2$ αν και μόνο αν ο αριθμός $\rho = 1$ είναι ρίζα και του $P(x)$ και του $P'(x)$

Οπότε

$$P(1) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + (3\alpha - \beta) \cdot 1 - 2 = 0 \Rightarrow \cancel{2} + \alpha + 3\alpha - \beta - \cancel{2} = 0 \Rightarrow 4\alpha - \beta = 0 \quad (1)$$

Ακόμη

$$P'(x) = 6x^2 + 2\alpha x + 3\alpha - \beta$$

Οπότε

$$P'(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 + 3\alpha - \beta = 0 \Rightarrow 6 + 2\alpha + 3\alpha - \beta = 0 \Rightarrow 5\alpha - \beta = -6 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha = -6$ και $\beta = -24$

γ) Έχουμε

$$\boxed{P(1)} = v \cdot 1^{v+1} - (v+1) \cdot 1^v + 1 = 0 \Rightarrow v - (v+1) + 1 = v - v - 1 + 1 = \boxed{0}$$

Ακόμη

$$P'(x) = v(v+1)x^v - v(v+1)x^{v-1}$$

Οπότε

$$\boxed{P'(1)} = v(v+1) \cdot 1^v - v(v+1) \cdot 1^{v-1} = v(v+1) - v(v+1) = \boxed{0}$$

Οπότε με βάση το ερώτημα 1) το πολώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $(x-1)^2$