

15.53

Καταρχήν θα βρούμε το βαθμό του πολυωνύμου. Έστω ότι το $P(x)$ είναι n – βαθμού. Τότε

το $4P(x)$ θα είναι επίσης n βαθμού

Ακόμη το $P'(x)$ θα είναι $n-1$ βαθμού και

το $[P'(x)]^2$ θα είναι $2(n-1)$ βαθμού

Οπότε επειδή $4P(x) = [P'(x)]^2$ τα δύο πολυώνυμα θα έχουν προφανώς τον ίδιο βαθμό. Επομένως

$$n = 2(n-1) \Rightarrow n = 2n - 2 \Rightarrow \boxed{n=2}$$

Έστω λοιπόν $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, ένα πολώνυμο δευτέρου βαθμού. Τότε

$P'(x) = 2\alpha x + \beta$. Οπότε

$$4P(x) = [P'(x)]^2 \Rightarrow 4(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = (2\alpha x + \beta)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\gamma = 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 \Rightarrow$$

$$4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\gamma = 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 4\alpha^2 \xrightarrow{\alpha \neq 0} \boxed{\alpha=1} \\ 4\beta = 4\alpha\beta \xrightarrow{\alpha=1} 4\beta = 4\beta \\ 4\gamma = \beta^2 \end{cases}$$

Ακόμη

$$P(1) = 4 \Rightarrow \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma = 4 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 4 \xrightarrow{\alpha=1} 1 + \beta + \gamma = 4 \Rightarrow \beta + \gamma = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta + \frac{\beta^2}{4} = 3 \Rightarrow 4\beta + \beta^2 = 12 \Rightarrow \beta^2 + 4\beta - 12 = 0$$

$$\Delta = 4^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 64$$

$$\beta_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} \nearrow \beta_1 = \frac{-4+8}{2} = 2 \\ \searrow \beta_1 = \frac{-4-8}{2} = -6 \end{cases}$$

$$\text{Για } \boxed{\beta=2} \xrightarrow{\gamma=\frac{\beta^2}{4}} \gamma = \frac{2^2}{4} \Rightarrow \boxed{\gamma=1} \text{ οπότε } \boxed{P(x) = x^2 + 2x + 1}$$

$$\text{Για } \boxed{\beta=-6} \xrightarrow{\gamma=\frac{\beta^2}{4}} \gamma = \frac{(-6)^2}{4} \Rightarrow \boxed{\gamma=9} \text{ οπότε } \boxed{P(x) = x^2 - 6x + 9}$$