15.51

Καταρχήν είναι

$$f(2-x)=g(x) \overset{x=0}{\Rightarrow} \boxed{f(2)=g(0)}$$

$$f(2-x)=g(x) \overset{x=2}{\Rightarrow} \boxed{f(0)=g(2)}$$

$$f(2-x)=g(x) \overset{\text{θέτουμε όπου x το 2−x}}{\Rightarrow} f(2-(2-x))=g(2-x) \Rightarrow \boxed{f(x)=g(2-x)}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x}} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(x)g(0)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(0)+f(x)g(0)-f(2)g(2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(0)-f(2)g(2)}{x}=$$

$$\overset{\substack{f(2)=g(0)\\ g(2)=f(0)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)\left[g(x)-g(0)\right]}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(0)-g(0)f(0)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{g(0)\left[f(x)-f(0)\right]}{x}$$

$$\overset{\substack{f:\text{παραγωγίσιμη στο } x_0=0\Rightarrow\\ f:\text{συνεχής στο } x_0=0\Rightarrow\\ \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)}}{=} f(0)\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}+g(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=$$

$$\overset{\substack{\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)\\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)}}{=} f(0)g'(0)+g(0)f'(0) \overset{\substack{f(0)=g(2)\\ g(0)=f(2)}}{=} \boxed{g(2)g'(0)+f(2)f'(0)}$$