15.50

Έχουμε

$$\lim_{x\to1}\frac{f^2(x)f'(x)+f(x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\left[f(x)f'(x)+1\right]}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}\frac{f(x)f'(x)+1}{\sqrt{x}-1}=$$

$$\overset{\substack{f:\text{παραγωγίσιμη στο } x_o=1\Rightarrow\\ f:\text{συνεχής στο } x_o=1\Rightarrow\\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=2}}{=}\quad 2\cdot\lim_{x\to1}\frac{f(x)f'(x)+1}{\sqrt{x}-1}\overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζουμε αριθμητή}\\ \text{και παρονομαστή με } \sqrt{x}+1}}{=}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to1}\frac{\left[f(x)f'(x)+1\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=2\cdot\lim_{x\to1}\frac{\left[f(x)f'(x)+1\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x}+1\right)\lim_{x\to1}\frac{\left[f(x)f'(x)+1\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}\overset{\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x}+1\right)=2}{=}4\cdot\lim_{x\to1}\frac{\left[f(x)f'(x)+1\right]}{x-1}=$$

$$\overset{\substack{\text{επεξήγηση 1}\\ \lim\limits_{x\to1}\frac{\left[f(x)f'(x)+1\right]}{x-1}=\frac{17}{4}}}{=}\quad\cancel{4}\cdot\frac{17}{\cancel{4}}=\boxed{17}$$

επεξήγηση 1

$$\boxed{\lim_{x\to1}\frac{f(x)f'(x)+1}{x-1}}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } f'(x)f(1)}{=}\lim_{x\to1}\frac{f(x)f'(x)-f'(x)f(1)+f'(x)f(1)+1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)f'(x)-f'(x)f(1)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{f'(x)f(1)+1}{x-1}\overset{f(1)=2}{=}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)\left[f(x)-f(1)\right]}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{2f'(x)+1}{x-1}=$$

$$\overset{\substack{\text{επεξήγηση 2}\\ \lim\limits_{x\to1}\frac{2f'(x)+1}{x-1}=4}}{=}\quad\lim_{x\to1}f'(x)\cdot\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+4$$

$$\overset{\substack{f':\text{παραγωγίσιμη στο } x_o=1\Rightarrow\\ f':\text{συνεχής στο } x_o=1\Rightarrow\\ \lim\limits_{x\to1}f'(x)=f'(1)=-\frac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-\frac{1}{2}}}{=}\quad-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4=\frac{1}{4}+4=\boxed{\frac{17}{4}}$$

επεξήγηση 2

$$\boxed{\lim_{x\to1}\frac{2f'(x)+1}{x-1}}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } 2f'(1)}{=}\lim_{x\to1}\frac{2f'(x)-2f'(1)+2f'(1)+1}{x-1}=$$

$$\overset{f'(1)=-\frac{1}{2}}{=}\lim_{x\to1}\frac{2\left[f'(x)-f'(1)\right]+\cancel{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)+1}{x-1}=2\cdot\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}\overset{\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)}{=}$$

$$=2f''(1)=2\cdot2=\boxed{4}$$