

α) Είναι

$$f'(x) = 1 + f^2(x) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = 2f(x)f'(x) \xrightarrow{f'(x)=1+f^2(x) \neq 0} \boxed{\frac{f''(x)}{f'(x)} = 2f(x)}$$

β) Είναι $f'(x) = 1 + f^2(x) \xrightarrow{x=0} f'(0) = 1 + f^2(0) \xrightarrow{f(0)=0} f'(0) = 1$ (1)

Οπότε από το α) ερώτημα έχουμε

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 2f(x) \xrightarrow{x=0} \frac{f''(0)}{f'(0)} = 2f(0) \xrightarrow{f(0)=0, f'(0)=1} \frac{f''(0)}{1} = 2 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{f''(0) = 0}$$

γ) $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}} \stackrel{f(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \stackrel{(1)}{=} \boxed{1}$