

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

15.36 1)

- α) • Αν $x < 0$, τότε $f(x) = x^2 + x$, οπότε $f'(x) = 2x + 1$
 • Αν $x > 0$, τότε $f(x) = \eta\mu x$, οπότε $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Για να βρούμε όμως την παράγωγο στο $x_0 = 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)^{f(0)=0}}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)^{f(0)=0}}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\text{Οπότε τελικά } f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \end{cases}$$

- β) • Αν $x < 1$, τότε $f(x) = x^2$, οπότε $f'(x) = 2x$
 • Αν $x > 1$, τότε $f(x) = x$, οπότε $f'(x) = 1$

Για να βρούμε όμως την παράγωγο στο $x_0 = 1$, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)^{f(1)=1}}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)^{f(1)=1}}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Άρα στο $x_0 = 1$ η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη

$$\text{Οπότε τελικά } f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

15.36 2)

$\boxed{\text{Αν } x > 0}$, τότε $f(x) = (x^2 + 7)\eta\mu x$, οπότε

$$f'(x) = (x^2 + 7)' \eta\mu x + (x^2 + 7)(\eta\mu x)' \Rightarrow \boxed{f'(x) = 2x\eta\mu x + (x^2 + 7)\sigma\upsilon\nu x}$$

$\boxed{\text{Αν } x < 0}$, τότε $f(x) = x^3\sigma\upsilon\nu x + 7x$, οπότε

$$f'(x) = (x^3)' \sigma\upsilon\nu x + x^3(\sigma\upsilon\nu x)' + (7x)' \Rightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2\sigma\upsilon\nu x - x^3\eta\mu x + 7}$$

Για να βρούμε όμως την παράγωγο στο $x_0 = 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)^{f(0)=0}}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 + 7)\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 7) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 7 \cdot 1 = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)^{f(0)=0}}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3\sigma\upsilon\nu x + 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x^2\sigma\upsilon\nu x + 7)}{\cancel{x}} = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{f'(0) = 7}$$

Οπότε τελικά

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu x + (x^2 + 7)\sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \\ 7, & x = 0 \\ 3x^2\sigma\upsilon\nu x - x^3\eta\mu x + 7, & x < 0 \end{cases}$$

15.36 3)

$\boxed{\text{Αν } x > 0}$, τότε $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$, οπότε

$$f'(x) = (\sqrt{x})' \eta\mu x + \sqrt{x} (\eta\mu x)' \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{\eta\mu x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x}$$

$\boxed{\text{Αν } x < 0}$, τότε $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, οπότε

$$f'(x) = (\eta\mu x)' - (\sigma\upsilon\nu x)' \Rightarrow \boxed{f'(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}$$

Για να βρούμε όμως την παράγωγο στο $x_0 = 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} & \stackrel{f(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \cdot 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} & \stackrel{f(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 1 - (-\infty) = +\infty \end{aligned} \right\}$$

Άρα στο $x_0 = 0$ η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη

Οπότε τελικά
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta\mu x + \sqrt{x} \sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \\ \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x, & x < 0 \end{cases}$$