

14.9 1)

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(x)=x^2-1}{f(1)=1^2-1=0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1 + 1 = 2$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(x)=x^3-x}{f(1)=1^3-1=0} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1 \cdot (1 + 1) = 2$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$, άρα $f'(1) = 2$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{f(x)=x^2-1}{f(0)=0^2-1=-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1 - (-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1} = 0$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{f(x)=2x}{f(0)=0^2-1=-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 1 \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

Οπότε, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$, η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη

στο $x_0 = 0$

(Μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ άρα ούτε παραγωγίσιμη)

14.9 2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(x)=3x-1}{f(1)=3 \cdot 1 - 1 = 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 3$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(x)=x^2+x}{f(1)=1^2+1=2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \stackrel{x^2+x-2=(x-1)(x+2)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = 1 + 2 = 3$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$, άρα $f'(1) = 3$

14.9 3)

Παρατηρούμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x - 3) = 2(-1) - 3 = -5 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [(-1)^3 - (-1) - 3] = -1 + 1 - 3 = -3$$

Άρα η f δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$

14.9 4)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \stackrel{f(x)=-x^2+4}{f(2)=-2^2+4=0} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{\cancel{x-2}} =$$

$$= -(2 + 2) = -4$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \stackrel{f(x)=x^2-2x, f(2)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{\cancel{x-2}} = 2$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, επομένως η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

14.9 5)

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} \stackrel{f(x)=2x^2+1, f(\lambda)=2\lambda^2+1}{=} \lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{2x^2 + 1 - 2\lambda^2 - 1}{x - \lambda} = \lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{2(x^2 - \lambda^2)}{x - \lambda} =$$
$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{2(\cancel{x-\lambda})(x+\lambda)}{\cancel{x-\lambda}} = 2(\lambda + \lambda) = 4\lambda$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^+} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} \stackrel{f(x)=4\lambda x - 2\lambda^2 + 1, f(\lambda)=2\lambda^2+1}{=} \lim_{x \rightarrow \lambda^+} \frac{4\lambda x - 2\lambda^2 + 1 - 2\lambda^2 - 1}{x - \lambda} = \lim_{x \rightarrow \lambda^+} \frac{4\lambda x - 4\lambda^2}{x - \lambda} =$$
$$\lim_{x \rightarrow \lambda^+} \frac{4\lambda(\cancel{x-\lambda})}{\cancel{x-\lambda}} = 4\lambda$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} = \lim_{x \rightarrow \lambda^+} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} = 4\lambda$, άρα $f'(\lambda) = 4\lambda$