14.43

$$f(x)\cdot f(-x)=1\overset{x=0}{\Rightarrow}f^2(0)=1\Rightarrow f(0)=1 \text{ ή } f(0)=-1$$

Όμως

$$f(x)\geq 1+x\overset{x=0}{\Rightarrow}f(0)\geq 1$$

Άρα δεν μπορεί να είναι $f(0)=-1$ επομένως $\boxed{f(0)=1}$

<u>Έστω $x>0$</u>

$$f(x)\geq 1+x\Rightarrow f(x)-1\geq x\overset{f(0)=1}{\Rightarrow}f(x)-f(0)\geq x\overset{x>0}{\Rightarrow}\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq 1 \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(x)\geq 1+x\xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} f(-x)\geq 1-x\xrightarrow{f(x)\cdot f(-x)=1\Rightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}}\frac{1}{f(x)}\geq 1-x\xrightarrow[1-x>0 \text{ για κάθε } x\in(-1,1)]{f(x)\geq 1+x\Rightarrow f(x)>0}$$

$$\Rightarrow f(x)\leq\frac{1}{1-x}\Rightarrow f(x)-1\leq\frac{1}{1-x}-1\Rightarrow f(x)-f(0)\leq\frac{1}{1-x}-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)-f(0)\leq\frac{x}{1-x}\overset{x>0}{\Rightarrow}\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq\frac{1}{1-x} \quad (2)$$

Επομένως

$$\left.\begin{array}{l}(1),(2)\Rightarrow 1\leq\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\leq\dfrac{1}{1-x}\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^+}1=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1-x}=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{κριτήριο παρεμβολής}}\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1} \quad (3)$$

<u>Ομοίως για $x<0$</u> έχουμε

$$f(x)\geq 1+x\Rightarrow f(x)-1\geq x\overset{f(0)=1}{\Rightarrow}f(x)-f(0)\geq x\overset{x<0}{\Rightarrow}\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq 1 \quad (4)$$

Ακόμη

$$f(x)\geq 1+x\xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} f(-x)\geq 1-x\xrightarrow{f(x)\cdot f(-x)=1\Rightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}}\frac{1}{f(x)}\geq 1-x\xrightarrow[1-x>0 \text{ για κάθε } x\in(-1,1)]{f(x)\geq 1+x\Rightarrow f(x)>0}$$

$$\Rightarrow f(x)\leq\frac{1}{1-x}\Rightarrow f(x)-1\leq\frac{1}{1-x}-1\Rightarrow f(x)-f(0)\leq\frac{1}{1-x}-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)-f(0)\leq\frac{x}{1-x}\overset{x<0}{\Rightarrow}\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq\frac{1}{1-x} \quad (5)$$

Επομένως

$$\left.\begin{array}{r}(4),(5) \Rightarrow 1 \geq \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \geq \dfrac{1}{1-x} \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{1-x} = 1\end{array}\right\} \overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1} \quad (6)$$

Έτσι τελικά

$$(3),(6) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 1}$$