14.42

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, θα ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0) \overset{g(0)=g'(0)=0}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} = 0 \quad (1)$$

$$\boxed{f'(0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\,\text{συν}\frac{x-1}{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\,\text{συν}\frac{x-1}{x} \overset{\text{επεξήγηση 1}}{=} \boxed{0}$$

επεξήγηση 1

$$-1 \le \text{συν}\frac{x-1}{x} \le 1 \Rightarrow \left|\text{συν}\frac{x-1}{x}\right| \le 1 \overset{\left|\frac{g(x)}{x}\right| \ge 0}{\Rightarrow} \left|\frac{g(x)}{x}\right|\left|\text{συν}\frac{x-1}{x}\right| \le \left|\frac{g(x)}{x}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\frac{g(x)}{x}\text{συν}\frac{x-1}{x}\right| \le \left|\frac{g(x)}{x}\right| \Rightarrow -\left|\frac{g(x)}{x}\right| \le \frac{g(x)}{x}\text{συν}\frac{x-1}{x} \le \left|\frac{g(x)}{x}\right|$$

Οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{g(x)}{x}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|\frac{g(x)}{x}\right|\right) \overset{(1)}{=} 0 \\ -\left|\frac{g(x)}{x}\right| \le \frac{g(x)}{x}\text{συν}\frac{x-1}{x} \le \left|\frac{g(x)}{x}\right| \end{array}\right\} \overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)}{x}\text{συν}\frac{x-1}{x}\right) = 0}$$