

14.41

α) Στη σχέση $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ (1), θέτουμε $y = x$ και έχουμε

$$f\left(\frac{x}{x}\right) = f(x) - f(x) \Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$$

β) Στη σχέση (1), θέτουμε $x = 1$, $y = x$, και έχουμε

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) - f(x) \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} \boxed{f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)}$$

γ) Στη σχέση (1), θέτουμε όπου y το $\frac{1}{y}$, και έχουμε

$$f\left(\frac{x}{\frac{1}{y}}\right) = f(x) - f\left(\frac{1}{y}\right) \stackrel{f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)}{\Rightarrow} \boxed{f(x \cdot y) = f(x) + f(y)}$$

δ) Είναι

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1 \quad (2)$$

Οπότε σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned} \boxed{f'(x_0)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{θέτουμε } y = \frac{x}{x_0} \Rightarrow x = y \cdot x_0}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y \cdot x_0) - f(x_0)}{y \cdot x_0 - x_0} \stackrel{f(xy) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(y \cdot x_0) = f(y) + f(x_0)}{=} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y) + \cancel{f(x_0)} - \cancel{f(x_0)}}{y \cdot x_0 - x_0} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y)}{x_0(y - 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y)}{y - 1} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{x_0}} \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^*$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{x}$