

α) Στη σχέση $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ (1), θέτουμε $y = x$ και έχουμε

$$f(x-x) = \frac{f(x)}{f(x)} \Rightarrow \boxed{f(0)=1}$$

β) Στη σχέση (1), θέτουμε $x = 0$, $y = x$, και έχουμε

$$f(0-x) = \frac{f(0)}{f(x)} \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} \boxed{f(-x) = \frac{1}{f(x)}}$$

γ) Στη σχέση (1), θέτουμε όπου y το $-y$, και έχουμε

$$f(x-(-y)) = \frac{f(x)}{f(-y)} \stackrel{f(-y)=\frac{1}{f(y)}}{\Rightarrow} f(x+y) = \frac{f(x)}{\frac{1}{f(y)}} \Rightarrow \boxed{f(x+y) = f(x)f(y)}$$

δ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ θα είναι και συνεχής

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (2)$$

$$\text{και ακόμη } f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} f'(0) = \frac{f(h) - 1}{h} \quad (3)$$

Οπότε σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned} \boxed{f'(x_0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \stackrel{(3) \Rightarrow f(x+h)=f(x)f(h)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot [f(h) - 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} \stackrel{(2), (3)}{=} \boxed{f'(0)f(x_0)} \end{aligned}$$