14.39

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ (1)

Επίσης

$$f(xy) = f(x)f(y) \overset{x=y=1}{\Rightarrow} f(1) = f(1)f(1) \Rightarrow f(1) = f^2(1) \overset{f:R_+^* \to R^* \Rightarrow f(1)\neq 0}{\Rightarrow} f(1) = 1 \quad (2)$$

Άρα $(1),(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1} = f'(1)$ (3)

Οπότε

$$\boxed{f'(x_o)} = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\frac{x}{x_o}\Rightarrow x=y\cdot x_o \\ \text{όταν } x\to x_o\ ,\ y\to 1}}{=} \lim_{y\to 1}\frac{f(y\cdot x_o)-f(x_o)}{y\cdot x_o - x_o} \overset{\substack{f(xy)=f(x)f(y)\Rightarrow \\ \Rightarrow f(y\cdot x_o)=f(y)f(x_o)}}{=}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{f(y)f(x_o)-f(x_o)}{y\cdot x_o - x_o} = \lim_{y\to 1}\frac{f(x_o)\left[f(y)-1\right]}{x_o(y-1)} = \lim_{y\to 1}\frac{f(x_o)}{x_o}\cdot\lim_{y\to 1}\frac{f(y)-1}{y-1} \overset{(3)}{=}$$

$$= \boxed{\frac{f(x_o)}{x_o}\cdot f'(1)}$$