14.38

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_o+5h)-f^2(x_o+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x_o+5h)-f(x_o+h)\right]\left[f(x_o+5h)+f(x_o+h)\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x_o+5h)-f(x_o+h)\right]\left[f(x_o+5h)+f(x_o+h)\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[f(x_o+5h)+f(x_o+h)\right]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+5h)-f(x_o+h)}{h}=$$

$$\overset{\substack{\lim_{h\to 0}f(x_o+h)=\lim_{h\to 0}f(x_o+5h)=f(x_o)\\(\text{διότι } f:\text{παραγωγίσιμη , άρα συνεχής})}}{=}2f(x_o)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+5h)-f(x_o+h)}{h}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(x_o)}{=}$$

$$=2f(x_o)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+5h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_o+h)}{h}=$$

$$=2f(x_o)\cdot\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+5h)-f(x_o)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)-f(x_o+h)}{h}\right]=$$

$$=2f(x_o)\cdot\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+5h)-f(x_o)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}\right]=$$

$$\overset{\substack{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+5h)-f(x_o)}{h}=5f'(x_o)\ (\text{επεξήγηση } 1)\\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=f'(x_o)}}{=}2f(x_o)\cdot\left[5f'(x_o)-f'(x_o)\right]=\boxed{8f(x_o)\cdot f'(x_o)}$$

επεξήγηση 1

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+5h)-f(x_o)}{h}}=\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=5h\Rightarrow h=\frac{y}{5}\\ \text{όταν } h\to 0,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{\frac{y}{5}}=$$

$$=5\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}\overset{\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=f'(x_o)}{=}\boxed{5f'(x_o)}$$