14.37

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+\alpha h)-f(x_o-\beta h)}{h}} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(x_o)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+\alpha h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_o-\beta h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+\alpha h)-f(x_o)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)-f(x_o-\beta h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+\alpha h)-f(x_o)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-\beta h)-f(x_o)}{h}=$$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+\alpha h)-f(x_o)}{h}=\alpha f'(x_o)$ (επεξήγηση 1)

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-\beta h)-f(x_o)}{h}=-\beta f'(x_o)$ (επεξήγηση 2)

$$= \alpha f'(x_o)-\left[-\beta f'(x_o)\right]=\boxed{(\alpha+\beta)f'(x_o)}$$

επεξήγηση 1

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+\alpha h)-f(x_o)}{h}} \overset{\theta\text{έτουμε } y=\alpha h\Rightarrow h=\frac{y}{\alpha}}{\overset{\text{όταν } h\to 0,\ y\to 0}{=}} \lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{\frac{y}{\alpha}}=$$

$$=\alpha\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y} \overset{\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=f'(x_o)}{=} \boxed{\alpha f'(x_o)}$$

επεξήγηση 2

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-\beta h)-f(x_o)}{h}} \overset{\theta\text{έτουμε } y=-\beta h\Rightarrow h=-\frac{y}{\beta}}{\overset{\text{όταν } h\to 0,\ y\to 0}{=}} \lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{-\frac{y}{\beta}}=$$

$$=-\beta\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y} \overset{\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=f'(x_o)}{=} \boxed{-\beta f'(x_o)}$$