

Επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ , θα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$

Οπότε

$$\begin{aligned} & \frac{g(x)}{f(x)} = 2x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = (2x^2 - 1)f(x) \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \quad \left[ \begin{array}{l} g(x) = (2x^2 - 1)f(x) \Rightarrow g(1) = f(1) \\ = \end{array} \right. \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - 1)f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{προσθαφαίρουµε } (2x^2 - 1)f(1) \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - 1)f(x) - (2x^2 - 1)f(1) + (2x^2 - 1)f(1) - f(1)}{x - 1} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - 1)f(x) - (2x^2 - 1)f(1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - 1)f(1) - f(1)}{x - 1} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - 1)[f(x) - f(1)]}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)(2x^2 - 1 - 1)}{x - 1} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)(2x^2 - 2)}{x - 1} \quad \left[ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \\ = \end{array} \right. \\ & = (2 \cdot 1^2 - 1) \cdot f'(1) + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(1)(x^2 - 1)}{x - 1} = f'(1) + f(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(1)(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \\ & = f'(1) + \lim_{x \rightarrow 1} 2f(1)(x + 1) = \boxed{f'(1) + 4f(1)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$