

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \boxed{g'(0)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \stackrel{\substack{g(x)=xf(x) \Rightarrow g(0)=0f(0)=0 \\ \frac{g(x)}{f(x)}=x \Rightarrow g(x)=xf(x)}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}f(x)}{\cancel{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{f: \text{συνεχής}}{=} \boxed{f(0)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

$$\beta) \quad \text{Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 1, \text{ θα ισχύει } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \boxed{g'(1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \stackrel{\substack{g(x)=xf(x) \Rightarrow g(1)=f(1) \\ \frac{g(x)}{f(x)}=x \Rightarrow g(x)=xf(x)}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{\text{προσθαφαιρούμε } xf(1)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - xf(1) + xf(1) - f(1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - xf(1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1) - f(1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x[f(x) - f(1)]}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)(\cancel{x} - 1)}{\cancel{x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} f(1) \stackrel{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)}{=} \end{aligned}$$

$$1 \cdot f'(1) + f(1) = \boxed{f'(1) + f(1)} \in \mathbb{R}$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$