14.31

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-f(1)}{x-1} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } xf(1)}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-xf(1)+xf(1)-f(1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-xf(1)}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(1)-f(1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\left[f(x)-f(1)\right]}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}x\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}f(1)=$

$\overset{\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)}{=} 1\cdot f'(1)+f(1)=\boxed{f'(1)+f(1)}$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(1)-f(x)}{x-1} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(1)}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(1)-f(1)}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(1)-f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$

$\overset{\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)}{=} \boxed{f(1)-f'(1)}$