Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

14.30

α) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(\alpha)f(x)-f(\alpha)g(x)}{x-\alpha}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } g(\alpha)f(\alpha)}{=}$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(\alpha)f(x)-g(\alpha)f(\alpha)+g(\alpha)f(\alpha)-f(\alpha)g(x)}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(\alpha)f(x)-g(\alpha)f(\alpha)}{x-\alpha}+\lim_{x\to\alpha}\frac{g(\alpha)f(\alpha)-f(\alpha)g(x)}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(\alpha)\left[f(x)-f(\alpha)\right]}{x-\alpha}+\lim_{x\to\alpha}\frac{-f(\alpha)\left[g(x)-g(\alpha)\right]}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}g(\alpha)\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}-\lim_{x\to\alpha}f(\alpha)\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=$$

$$\overset{\substack{\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)\\ \lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=g'(\alpha)}}{=}\quad\boxed{g(\alpha)\cdot f'(\alpha)-f(\alpha)\cdot g'(\alpha)}$$

β) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)g(x)-f(\alpha)g(\alpha)}{x-\alpha}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } g(x)f(\alpha)}{=}$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)\left[f(x)-f(\alpha)\right]}{x-\alpha}+\lim_{x\to\alpha}\frac{f(\alpha)\left[g(x)-g(\alpha)\right]}{x-\alpha}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}g(x)\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+\lim_{x\to\alpha}f(\alpha)\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=$$

$$\overset{\substack{\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)\\ \lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=g'(\alpha)\\ \lim\limits_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)\,(\text{διότι } f:\text{παραγωγίσιμη , άρα συνεχής})}}{=}\quad\boxed{g(\alpha)\cdot f'(\alpha)+f(\alpha)\cdot g'(\alpha)}$$