

α) $3x^2 - 2x^4 \leq xf(x) \leq 3x^2 + 2x^4$

Έστω $x > 0$.

Διαιρούμε την σχέση $3x^2 - 2x^4 \leq xf(x) \leq 3x^2 + 2x^4$ με x και έχουμε

$$\frac{3x^2 - 2x^4}{x} \leq \frac{\cancel{x}f(x)}{\cancel{x}} \leq \frac{3x^2 + 2x^4}{x} \Rightarrow \frac{\cancel{x}(3x - 2x^3)}{\cancel{x}} \leq f(x) \leq \frac{\cancel{x}(3x + 2x^3)}{\cancel{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 2x^3 \leq f(x) \leq 3x + 2x^3$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2x^3 \leq f(x) \leq 3x + 2x^3, \text{ για κάθε } x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x - 2x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 2x^3) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0} \quad (2)$$

Ομοίως αν $x < 0$.

Διαιρούμε την σχέση $3x^2 - 2x^4 \leq xf(x) \leq 3x^2 + 2x^4$ με x και έχουμε

$$\frac{3x^2 - 2x^4}{x} \geq \frac{\cancel{x}f(x)}{\cancel{x}} \geq \frac{3x^2 + 2x^4}{x} \Rightarrow \frac{\cancel{x}(3x - 2x^3)}{\cancel{x}} \geq f(x) \geq \frac{\cancel{x}(3x + 2x^3)}{\cancel{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 2x^3 \geq f(x) \geq 3x + 2x^3$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2x^3 \geq f(x) \geq 3x + 2x^3, \text{ για κάθε } x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - 2x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 2x^3) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0} \quad (2)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \begin{array}{l} f: \text{συνεχής στο } x_0 = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \end{array} \Rightarrow f(0) = 0$$

β) Διαιρούμε την σχέση $3x^2 - 2x^4 \leq xf(x) \leq 3x^2 + 2x^4$ με $x^2 > 0$ και έχουμε

$$\frac{3x^2 - 2x^4}{x^2} \leq \frac{\cancel{x^2}f(x)}{\cancel{x^2}} \leq \frac{3x^2 + 2x^4}{x^2} \Rightarrow \frac{\cancel{x^2}(3 - 2x^2)}{\cancel{x^2}} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\cancel{x^2}(3 + 2x^2)}{\cancel{x^2}} \Rightarrow$$

$$\stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} 3 - 2x^2 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 3 + 2x^2$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} 3 - 2x^2 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 3 + 2x^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (3 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (3 + 2x^2) = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 3}$$