

Έχουμε $|f(x)| \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq f(x) \leq x^2$ (1)

Ακόμη

(1) $\xRightarrow{\text{θέτουμε } x=0} 0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

Έστω $x > 0$. Διαιρούμε την σχέση (1) με x και έχουμε

$$-\frac{x^2}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x^2}{x} \Rightarrow -x \leq \frac{f(x)}{x} \leq x$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} -x \leq \frac{f(x)}{x} \leq x \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0} \quad (2)$$

Ομοίως αν $x < 0$. Διαιρούμε την σχέση (1) με x και έχουμε

$$-\frac{x^2}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{x^2}{x} \Rightarrow -x \geq \frac{f(x)}{x} \geq x$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} -x \geq \frac{f(x)}{x} \geq x \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0} \quad (3)$$

(2), (3) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$ και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$