

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \stackrel{f(x)=x^2+\alpha x+\beta}{f(2)=3} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 3}{x - 2}$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ θα πρέπει το $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 3}{x - 2}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός

Επειδή όμως $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0$, θα πρέπει αναγκαία και $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + \alpha x + \beta - 3) = 0$ διότι διαφορετικά το $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 3}{x - 2}$ θα ήταν είτε $+\infty$, είτε $-\infty$ είτε δεν θα υπήρχε

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + \alpha x + \beta - 3) = 0 \Rightarrow 2^2 + \alpha \cdot 2 + \beta - 3 = 0 \Rightarrow 2\alpha + \beta + 1 = 0 \quad (1)$$

και έτσι

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 3}{x - 2} \stackrel{(1) \Rightarrow \beta = -1 - 2\alpha}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + \alpha x - 1 - 2\alpha - 3}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + \alpha x - 2\alpha - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 - 4) + (\alpha x - 2\alpha)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2+\alpha)}{\cancel{x-2}} = \boxed{4 + \alpha} \end{aligned}$$

Ακόμη

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} \stackrel{f(x)=\gamma x^2+x-3}{f(2)=3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\gamma x^2 + x - 3 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\gamma x^2 + x - 6}{x - 2}$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ θα πρέπει το $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\gamma x^2 + x - 6}{x - 2}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός

Επειδή όμως $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$, θα πρέπει αναγκαία και $\lim_{x \rightarrow 2^+} (\gamma x^2 + x - 6) = 0$ διότι διαφορετικά το $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\gamma x^2 + x - 6}{x - 2}$ θα ήταν είτε $+\infty$, είτε $-\infty$ είτε δεν θα υπήρχε

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (\gamma x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow \gamma \cdot 2^2 + 2 - 6 = 0 \Rightarrow 4\gamma - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = 1}$$

και έτσι

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\gamma x^2 + x - 6}{x - 2} \stackrel{\gamma=1}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{x-2}} = 2 + 3 = \boxed{5}$$

Όμως, για να είναι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Rightarrow 4 + \alpha = 5 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Τέλος

$$(1) \overset{\alpha=1}{\Rightarrow} \boxed{\beta = -3}$$