

14.22 1)

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 2$, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \quad (1)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2) \quad (2)$$

Έστω $x > 2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\stackrel{f(2)=g(2)}{\Rightarrow} f(x) - f(2) \leq g(x) - g(2) \stackrel{\text{διαιρούμε με } x-2 > 0}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \Rightarrow \\ &\stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow} f'(2) \leq g'(2) \quad (3) \end{aligned}$$

Ομοίως για $x < 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\stackrel{f(2)=g(2)}{\Rightarrow} f(x) - f(2) \leq g(x) - g(2) \stackrel{\text{διαιρούμε με } x-2 < 0}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \geq \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \geq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \Rightarrow \\ &\stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow} f'(2) \geq g'(2) \quad (4) \end{aligned}$$

$$(3), (4) \Rightarrow \boxed{f'(2) = g'(2)}$$

14.22 2)

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (1)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \quad (2)$$

Έστω $x > x_0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\stackrel{f(x_0)=g(x_0)}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) \leq g(x) - g(x_0) \stackrel{\text{διαιρούμε με } x-x_0 > 0}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \\ &\stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow} f'(x_0) \leq g'(x_0) \quad (3) \end{aligned}$$

Ομοίως για $x < x_0$, έχουμε

$$f(x) \leq g(x) \stackrel{f(x_0)=g(x_0)}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) \leq g(x) - g(x_0) \stackrel{\text{διαιρούμε με } x-x_0 < 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow} f'(x_0) \geq g'(x_0) \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow \boxed{f'(x_0) = g'(x_0)}$$

14.22 3)

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \quad (1)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = g'(\alpha) \quad (2)$$

Έστω $x > \alpha$. Έχουμε

$$f(x) + x \leq g(x) + \alpha \stackrel{f(\alpha)=g(\alpha)}{\Rightarrow} f(x) - f(\alpha) + x \leq g(x) - g(\alpha) + \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - f(\alpha) + x - \alpha \leq g(x) - g(\alpha) \stackrel{\text{διαιρούμε με } x - \alpha > 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} + \frac{\cancel{x} - \cancel{\alpha}}{\cancel{x} - \cancel{\alpha}} \leq \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} + \lim_{x \rightarrow \alpha^+} 1 \leq \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow} f'(\alpha) + 1 \leq g'(\alpha) \quad (3)$$

Ομοίως για $x < \alpha$, έχουμε

$$f(x) + x \leq g(x) + \alpha \stackrel{f(\alpha)=g(\alpha)}{\Rightarrow} f(x) - f(\alpha) + x \leq g(x) - g(\alpha) + \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - f(\alpha) + x - \alpha \leq g(x) - g(\alpha) \stackrel{\text{διαιρούμε με } x - \alpha < 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} + \frac{\cancel{x} - \cancel{\alpha}}{\cancel{x} - \cancel{\alpha}} \geq \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} + \lim_{x \rightarrow \alpha^+} 1 \geq \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow} f'(\alpha) + 1 \geq g'(\alpha) \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow \boxed{f'(\alpha) + 1 = g'(\alpha)}$$

14.22 4)

Έστω ένα τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$f(x) - y^4 \leq f(x + y) \leq f(x) + y^2 - 2y^3 \stackrel{\substack{\text{θέτουμε} \\ x=x_0 \\ y=h}}{\Rightarrow}$$

$$f(x_0) - h^4 \leq f(x_0 + h) \leq f(x_0) + h^2 - 2h^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -h^4 \leq f(x_0 + h) - f(x_0) \leq h^2 - 2h^3 \quad (1)$$

Για $h > 0$ έχουμε

$$(1) \Rightarrow \frac{-h^4}{h} \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{h^2 - 2h^3}{h} \Rightarrow -h^3 \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq h - 2h^2 \quad (2)$$

$$\text{Όμως } \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h^3) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h - 2h^2) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Οπότε } (2), (3) \stackrel{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = 0} \quad (4)$$

Ομοίως για $h < 0$ έχουμε

$$(1) \Rightarrow \frac{-h^4}{h} \geq \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \geq \frac{h^2 - 2h^3}{h} \Rightarrow -h^3 \geq \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \geq h - 2h^2 \quad (5)$$

$$\text{Όμως } \lim_{h \rightarrow 0^-} (-h^3) = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h - 2h^2) = 0 \quad (6)$$

$$\text{Οπότε } (5), (6) \stackrel{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = 0} \quad (7)$$

$$\text{Τελικά } (4), (7) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(x_o) = 0} \quad \text{άρα η } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in \mathbb{R}$