Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

14.21 1)

Στη σχέση $f(x+y)=f(x)f(y)$ (1) θέτουμε $x=y=0$ και έχουμε

$$f(0+0)=f(0)\cdot f(0)\Rightarrow f(0)=f^2(0)\overset{f(0)\neq 0}{\Rightarrow} f(0)=1 \quad (2)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ είναι

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\overset{(2)}{\Rightarrow} f'(0)=\frac{f(h)-1}{h} \quad (3)$$

Οπότε για κάθε $x_o\in R$, είναι

$$\boxed{f'(x_o)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x)}{h}\overset{(1)\Rightarrow f(x_o+h)=f(x_o)\cdot f(h)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)\cdot f(h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)\left[f(h)-1\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\cdot\lim_{h\to 0}f(x_o)\overset{(3)}{=}\boxed{f'(0)f(x_o)}$$

14.21 2)

Στη σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (1) θέτουμε $x=y=0$ και έχουμε

$$f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow 2f(0)=f(0)\Rightarrow \boxed{f(0)=0} \quad (2)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ είναι

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\overset{(2)}{\Rightarrow} f'(0)=\frac{f(h)}{h} \quad (3)$$

Οπότε για κάθε $x_o\in R$, είναι

$$\boxed{f'(x_o)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x)}{h}\overset{(1)\Rightarrow f(x_o+h)=f(x_o)+f(h)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f(x_o)}+f(h)-\cancel{f(x_o)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\overset{(3)}{=}\boxed{f'(0)}$$

14.21 3)

Για κάθε $x_o\in R$, είναι

$$\boxed{f'(x_o)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}\overset{\substack{f(x+y)=f(x)f(y)\overset{x=x_o,\ y=h}{\Rightarrow}\\ f(x_o+h)=f(x_o)\cdot f(h)}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)\cdot f(h)-f(x_o)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)\cdot\left[f(h)-1\right]}{h}=f(x_o)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\overset{f(x)=1+xg(x)}{=}f(x_o)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}+hg(h)-\cancel{1}}{h}=$$

$$=f(x_o)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}g(h)}{\cancel{h}}=f(x_o)\cdot\lim_{h\to 0}g(h)\overset{\lim_{x\to 0}g(x)=1}{=}f(x_o)\cdot 1=\boxed{f(x_o)}$$

14.21 4)

Στη σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)+5x^2y+2xy^2$ (1) θέτουμε $x=y=0$ και έχουμε

$$f(0+0)=f(0)+f(0)+5\cdot 0^2\cdot 0+2\cdot 0\cdot 0^2\Rightarrow \cancel{f(0)}=\cancel{f(0)}+f(0)\Rightarrow f(0)=0 \quad (2)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ είναι

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\overset{(2)}{\Rightarrow} f'(0)=\frac{f(h)}{h} \quad (3)$$

Οπότε σε κάθε $x \in R$, είναι

$$\boxed{f'(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{(1)\Rightarrow f(x+h)=f(x)+f(h)+5x^2h+2xh^2}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f(x)}+f(h)+5x^2h+2xh^2-\cancel{f(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{5x^2h+2xh^2}{h} \overset{(3)}{=} f'(0) + \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(5x^2+2xh\right)}{\cancel{h}} = f'(0)+5x^2 \in R$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x \in R$ άρα είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R

14.21 5)

$$f(x+y)=f(x)\sigma\upsilon\nu y+f(y)\sigma\upsilon\nu x \overset{x=y=0}{\Rightarrow} f(0)=f(0)\sigma\upsilon\nu 0+f(0)\sigma\upsilon\nu 0 \overset{\sigma\upsilon\nu 0=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(0)=2f(0) \Rightarrow \boxed{f(0)=0}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, θα ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = f'(0) \quad (1)$$

Οπότε

$$\boxed{f'(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{\substack{f(x+y)=f(x)\sigma\upsilon\nu y+f(y)\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \\ f(x+h)=f(x)\sigma\upsilon\nu h+f(h)\sigma\upsilon\nu x}}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\sigma\upsilon\nu h+f(h)\sigma\upsilon\nu x-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\sigma\upsilon\nu h-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(h)\sigma\upsilon\nu x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\sigma\upsilon\nu x \overset{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h} + f'(0)\cdot\sigma\upsilon\nu x \overset{\lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0}{=}$$

$$= f(x)\cdot 0+f'(0)\cdot\sigma\upsilon\nu x = \boxed{f'(0)\cdot\sigma\upsilon\nu x}$$

14.21 6)

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι

$$\boxed{f'(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{\substack{f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)} \Rightarrow \\ f(x+y)=\frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)\cdot f(h)}}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)\cdot f(h)}-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)\left[1-f(x)\cdot f(h)\right]}{h\left[1-f(x)\cdot f(h)\right]} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f(x)}+f(h)-\cancel{f(x)}+f^2(x)f(h)}{h\left[1-f(x)\cdot f(h)\right]} =$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)\left[1+f^2(x)\right]}{h\left[1-f(x)\cdot f(h)\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)\cdot f(h)}\overset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1}{=}$$

$$=1\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)\cdot f(h)}=\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}f(h)}\quad (1)$$

Όμως

Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$ και

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=x\cdot g(x)\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[x\cdot g(x)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}g(x)\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=0\cdot 1\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to 0}f(x)=0}$$

Οπότε

$$(1)\overset{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0}{\Rightarrow}\boxed{f'(x)}=\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)\cdot 0}=\boxed{1+f^2(x)}$$