Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

14.20 1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o-7h)}{4h}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(x_o)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_o-7h)}{4h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{4h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)-f(x_o-7h)}{4h}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-7h)-f(x_o)}{h}\overset{f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}}{=}$$

$$=\frac{1}{4}f'(x_o)-\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-7h)-f(x_o)}{h}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-7h\Rightarrow h=-\frac{y}{7}\\ \text{όταν } h\to 0,\ y\to 0}}{=}$$

$$=\frac{1}{4}f'(x_o)-\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{-\frac{y}{7}}=\frac{1}{4}f'(x_o)+\frac{7}{4}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=$$

$$\overset{f'(x_o)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}}{=}\frac{1}{4}f'(x_o)+\frac{7}{4}f'(x_o)=\frac{8}{4}f'(x_o)=\boxed{2f'(x_o)}$$

14.20 2)

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o-h)}{2h}}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(x_o)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_o-h)}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)-f(x_o-h)}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}\overset{f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}f'(x_o)-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-h\Rightarrow h=-y\\ \text{όταν } h\to 0,\ y\to 0}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}f'(x_o)-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{-y}=\frac{1}{2}f'(x_o)+\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=$$

$$\overset{f'(x_o)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}}{=}\frac{1}{2}f'(x_o)+\frac{1}{2}f'(x_o)=\boxed{f'(x_o)}$$

14.20 3)

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o-3h)}{4h}}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(x_o)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_o-3h)}{4h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{4h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)-f(x_o-3h)}{4h}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-3h)-f(x_o)}{h}\overset{f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}}{=}$$

$$=\frac{1}{4}f'(x_o)-\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-3h)-f(x_o)}{h}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-3h\Rightarrow h=-\frac{y}{3}\\ \text{όταν } h\to 0,\ y\to 0}}{=}$$

$$=\frac{1}{4}f'(x_o)-\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{-\frac{y}{3}}=\frac{1}{4}f'(x_o)+\frac{3}{4}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=$$

$$\overset{f'(x_o)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}}{=}\frac{1}{4}f'(x_o)+\frac{3}{4}f'(x_o)=\frac{4}{4}f'(x_o)=\boxed{f'(x_o)}$$

14.20 4)

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+3h)-f(x_o-5h)}{h}}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(x_o)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+3h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_o-5h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+3h)-f(x_o)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)-f(x_o-5h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+3h)-f(x_o)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-5h)-f(x_o)}{h}\overset{\substack{\text{επεξήγηση 1}\\ \text{επεξήγηση 2}}}{=}3f'(x_o)+5f'(x_o)=8f'(x_o)$$

επεξήγηση 1

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+3h)-f(x_o)}{h}}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=3h\Rightarrow h=\frac{y}{3}\\ \text{όταν } h\to 0,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{\frac{y}{3}}=$$

$$=3\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}\overset{\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=f'(x_o)}{=}\boxed{3f'(x_o)}$$

επεξήγηση 2

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-5h)-f(x_o)}{h}}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-5h\Rightarrow h=-\frac{y}{5}\\ \text{όταν } h\to 0,\ y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{-\frac{y}{5}}=$$

$$=-5\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}\overset{\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=f'(x_o)}{=}\boxed{-5f'(x_o)}$$

14.20 5)

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-2h)-f(x_o-8h)}{3h}}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(x_o)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-2h)-f(x_o)+f(x_o)-f(x_o-8h)}{3h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-2h)-f(x_o)}{3h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)-f(x_o-8h)}{3h}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-2h)-f(x_o)}{h}-\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-8h)-f(x_o)}{h}\overset{\substack{\text{επεξήγηση 1}\\ \text{επεξήγηση 2}}}{=}-\frac{2}{3}f'(x_o)+\frac{8}{3}f'(x_o)=$$

$$=\frac{6}{3}f'(x_o)=2f'(x_o)$$

επεξήγηση 1

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-2h)-f(x_o)}{h}}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-2h\Rightarrow h=-\frac{y}{2}\\ \text{όταν } h\to 0\text{ , } y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{-\frac{y}{2}}=$$

$$=-2\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}\overset{\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=f'(x_o)}{=}\boxed{-2f'(x_o)}$$

επεξήγηση 2

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-8h)-f(x_o)}{h}}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-8h\Rightarrow h=-\frac{y}{8}\\ \text{όταν } h\to 0\text{ , } y\to 0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{-\frac{y}{8}}=$$

$$=-8\lim_{y\to 0}\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}\overset{\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}=f'(x_o)}{=}\boxed{-8f'(x_o)}$$