Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

14.18 1)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 2$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$

Οπότε

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2x^2}{x-2} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(2)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)+f(2)-2x^2}{x-2} \overset{f(2)=8}{=}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} + \lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x-2} \overset{\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)}{=} f'(2) + \lim_{x\to 2}\frac{-2(x^2-4)}{x-2} =$$

$$= f'(2) + \lim_{x\to 2}\frac{-2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} \overset{f'(2)=-7}{=} -7-2(2+2) = \boxed{-15}$$

14.18 2)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

Οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(1)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)+f(1)-2x}{x-1} \overset{f(1)=2}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{x-1} = \overset{\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)}{=} f'(1) + \lim_{x\to 1}\frac{-2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \overset{f'(1)=3}{=} 3-2 = \boxed{1}$$

14.18 3)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 3$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)$

Οπότε

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-5x}{x-3} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } f(3)}{=} \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)+f(3)-5x}{x-3} \overset{f(3)=15}{=}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} + \lim_{x\to 3}\frac{15-5x}{x-3} \overset{\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)}{=} f'(3) + \lim_{x\to 3}\frac{-5\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} \overset{f'(3)=10}{=}$$

$$= 10-5 = \boxed{5}$$

14.18 4)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 3$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)$

Οπότε

$$\lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-x}{x-3} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } 3f(3)}{=} \lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-3f(3)+3f(3)-x}{x-3} \overset{f(3)=1}{=}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{3f(x)-3f(3)}{x-3} + \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x-3} = 3\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} + \lim_{x\to 3}\frac{-\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} =$$

$$\overset{\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)}{=} 3f'(3)-1 \overset{f'(3)=5}{=} \boxed{14}$$

14.18 5)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

Οπότε

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)+2}{x-2}\overset{\text{προσθαφαιρούμε }xf(2)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-xf(2)+xf(2)+2}{x-2}\overset{f(2)=-1}{=}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-xf(2)}{x-2}+\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x\left[f(x)-f(2)\right]}{x-2}+\lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-1\overset{\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)}{=}=2f'(2)-1\overset{f'(2)=5}{=}\boxed{9}$$

14.18 6)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)$

Οπότε

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2f(x)-4}{x+2}\overset{\text{προσθαφαιρούμε }x^2f(-2)}{=}\lim_{x\to -2}\frac{x^2f(x)-x^2f(-2)+x^2f(-2)-4}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2f(x)-x^2f(-2)}{x+2}+\lim_{x\to -2}\frac{x^2f(-2)-4}{x+2}\overset{f(-2)=1}{=}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2\left[f(x)-f(-2)\right]}{x+2}+\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}x^2\cdot\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}+\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}\overset{\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)}{=}$$

$$=(-2)^2\cdot f'(-2)-2-2\overset{f'(-2)=3}{=}4\cdot 3-4=\boxed{8}$$

14.18 7)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=3$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

Οπότε

$$\lim_{x\to 3}\frac{(f(x))^2-(f(3))^2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left[f(x)-f(3)\right]\left[f(x)+f(3)\right]}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left[f(x)-f(3)\right]\left[f(x)+f(3)\right]\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left[f(x)-f(3)\right]\left[f(x)+f(3)\right]\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{x}^2-\sqrt{3}^2}=$$

$$\overset{\substack{\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)\\ \lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)\,(\text{διότι f: παραγωγίσιμη , άρα συνεχής})}}{=}\lim_{x\to 3}\left[f(x)+f(3)\right]\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\cdot\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=$$

$$2f(3)2\sqrt{3}\cdot f'(3)=4\sqrt{3}f(3)f'(3)\overset{\substack{f(3)=5\sqrt{3}\\ f'(3)=6}}{=}4\cdot\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}\cdot 6=\boxed{360}$$