Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

14.17 1)

$$\lim_{x\to x_o}\frac{x^2f(x)-x_o^2f(x_o)}{x-x_o}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } x^2f(x_o)}{=}$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{x^2f(x)-x^2f(x_o)+x^2f(x_o)-x_o^2f(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{x^2f(x)-x^2f(x_o)}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}\frac{x^2f(x_o)-x_o^2f(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{x^2\left[f(x)-f(x_o)\right]}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}\frac{f(x_o)(x^2-x_o^2)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}x^2\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}f(x_o)\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{(x-x_o)(x+x_o)}{x-x_o}$$

$$\overset{\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)}{=}\quad =x_o^2\cdot f'(x_o)+f(x_o)\cdot(x_o+x_o)=$$

$$=\boxed{x_o^2\cdot f'(x_o)+2x_o\cdot f(x_o)}$$

14.17 2)

$$\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x)-x_of(x_o)}{x-x_o}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } xf(x_o)}{=}$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x)-xf(x_o)+xf(x_o)-x_of(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x)-xf(x_o)}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x_o)-x_of(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{x\left[f(x)-f(x_o)\right]}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}\frac{f(x_o)(x-x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}x\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}f(x_o)=$$

$$\overset{\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)}{=}\quad\boxed{x_o\cdot f'(x_o)+f(x_o)}$$

14.17 3)

$$\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x_o)-x_of(x)}{x-x_o}\overset{\text{προσθαφαιρούμε } xf(x)}{=}$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x_o)-xf(x)+xf(x)-x_of(x)}{x-x_o}=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x_o)-xf(x)}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x)-x_of(x)}{x-x_o}=$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{-x\left[f(x)-f(x_o)\right]}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)\,(x-x_o)}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o}(-x)\cdot \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} f(x)$$

$$\overset{\substack{\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o) \\ \lim_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)\,(\text{διότι } f:\text{παραγωγίσιμη , άρα συνεχής})}}{=} \boxed{-x_o\cdot f'(x_o)+f(x_o)}$$

14.17 4)

$$\lim_{x\to x_o} \frac{x^2 f(x_o)-x_o^2 f(x)}{x-x_o} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } x^2 f(x)}{=}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x^2 f(x_o)-x^2 f(x)+x^2 f(x)-x_o^2 f(x)}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x^2 f(x_o)-x^2 f(x)}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} \frac{x^2 f(x)-x_o^2 f(x)}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{-x^2\left[f(x)-f(x_o)\right]}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)\left(x^2-x_o^2\right)}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o}\left(-x^2\right)\cdot \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)\,(x-x_o)\,(x+x_o)}{x-x_o} =$$

$$\overset{\substack{\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o) \\ \lim_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)\,(\text{διότι } f:\text{παραγωγίσιμη , άρα συνεχής})}}{=} -x_o^2\cdot f'(x_o)+f(x_o)(x_o+x_o)=$$

$$= \boxed{-x_o^2\cdot f'(x_o)+2x_o\cdot f(x_o)}$$

14.17 5)

$$\lim_{x\to x_o} \frac{x_o f^2(x)-x f^2(x_o)}{x-x_o} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } x_o f^2(x_o)}{=}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x_o f^2(x)-x_o f^2(x_o)+x_o f^2(x_o)-x f^2(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x_o f^2(x)-x_o f^2(x_o)}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} \frac{x_o f^2(x_o)-x f^2(x_o)}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x_o\left[f^2(x)-f^2(x_o)\right]}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} \frac{-f^2(x_o)\,(x-x_o)}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x_o\left[f(x)+f(x_o)\right]\left[f(x)-f(x_o)\right]}{x-x_o} - \lim_{x\to x_o} f^2(x_o) =$$

$$= \lim_{x\to x_o} x_o\left[f(x)+f(x_o)\right]\cdot \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} - f^2(x_o) =$$

$$\overset{\substack{\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o) \\ \lim_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)\,(\text{διότι } f:\text{παραγωγίσιμη , άρα συνεχής})}}{=} x_o\cdot\left[f(x_o)+f(x_o)\right]\cdot f'(x_o)-f^2(x_o)=$$

$$= \boxed{2x_o f(x_o) f'(x_o) - f^2(x_o)}$$

14.17 6)

$$\lim_{x\to x_o} \frac{xf^2(x) - x_o f^2(x_o)}{x - x_o} \overset{\text{προσθαφαιρούμε } xf^2(x_o)}{=}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{xf^2(x) - xf^2(x_o) + xf^2(x_o) - x_o f^2(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{xf^2(x) - xf^2(x_o)}{x - x_o} + \lim_{x\to x_o} \frac{xf^2(x_o) - x_o f^2(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x\left[f^2(x) - f^2(x_o)\right]}{x - x_o} + \lim_{x\to x_o} \frac{f^2(x_o)\cancel{(x - x_o)}}{\cancel{x - x_o}} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x\left[f(x) + f(x_o)\right]\left[f(x) - f(x_o)\right]}{x - x_o} + \lim_{x\to x_o} f^2(x_o) =$$

$$= \lim_{x\to x_o} x\left[f(x) + f(x_o)\right] \cdot \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} + \lim_{x\to x_o} f^2(x_o) =$$

$$\overset{\substack{\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o) \\ \lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o) \text{ (διότι } f\text{: παραγωγίσιμη, άρα συνεχής)}}}{=} x_o \cdot \left[f(x_o) + f(x_o)\right] \cdot f'(x_o) + f^2(x_o) =$$

$$= \boxed{2x_o f(x_o) f'(x_o) + f^2(x_o)}$$

14.17 7)

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f^2(x) - f^2(x_o)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_o}} = \lim_{x\to x_o} \frac{\left[f(x) - f(x_o)\right]\left[f(x) + f(x_o)\right]\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_o}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_o}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{\left[f(x) - f(x_o)\right]\left[f(x) + f(x_o)\right]\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_o}\right)}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x_o}^2} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \left[f(x) + f(x_o)\right]\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_o}\right) \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$\overset{\substack{\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o) \\ \lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o) \text{ (διότι } f\text{: παραγωγίσιμη, άρα συνεχής)}}}{=} \left[f(x_o) + f(x_o)\right]\left(\sqrt{x_o} + \sqrt{x_o}\right) f'(x_o) =$$

$$= \boxed{4\sqrt{x_o} \cdot f(x_o) \cdot f'(x_o)}$$