

14.16 1)

$$\alpha) \quad x^2 + x + 3 \leq f(x) \leq x^3 + x + 3 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=0} 0^2 + 0 + 3 \leq f(0) \leq 0^3 + 0 + 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \leq f(0) \leq 3 \Rightarrow \boxed{f(0) = 3}$$

$$\beta) \quad x^2 + x + 3 \leq f(x) \leq x^3 + x + 3 \Rightarrow x^2 + x \leq f(x) - 3 \leq x^3 + x \xRightarrow{f(0)=3} \\ \Rightarrow \boxed{x(x+1) \leq f(x) - f(0) \leq x(x^2 + 1)}$$

γ) Έστω $x > 0$. Διαιρούμε την σχέση του ερωτήματος β) με x και έχουμε

$$\frac{x(x+1)}{x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \frac{x(x^2 + 1)}{x} \Rightarrow \\ x+1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \leq x^2 + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1} \quad (1)$$

Ομοίως αν $x < 0$. Διαιρούμε την σχέση του ερωτήματος β) με x και έχουμε

$$\frac{x(x+1)}{x} \geq \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{x(x^2 + 1)}{x} \Rightarrow \\ x+1 \geq \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \geq x^2 + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \text{ και άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0$$

14.16 2)

$$\alpha) \quad x^2 + 1 \leq f(x) \leq 3x^2 - 4x + 3 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1} 1^2 + 1 \leq f(1) \leq 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \leq f(1) \leq 2 \Rightarrow \boxed{f(1) = 2}$$

$$\beta) \quad x^2 + 1 \leq f(x) \leq 3x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x^2 - 1 \leq f(x) - 2 \leq 3x^2 - 4x + 1 \xRightarrow{f(1)=2} \\ \Rightarrow \boxed{x^2 - 1 \leq f(x) - f(1) \leq 3x^2 - 4x + 1}$$

γ) Έστω $x > 1$. Διαιρούμε την σχέση του ερωτήματος β) με $x-1 > 0$ και έχουμε

$$\frac{x^2 - 1}{x-1} \leq \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \leq \frac{3x^2 - 4x + 1}{x-1} \xRightarrow{3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1)} \\ \Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \leq \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \leq \frac{\cancel{(x-1)}(3x-1)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x+1 &\leq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq 3x-1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-1) = 2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2} \quad (1)$$

Ομοίως αν $x < 1$. Διαιρούμε την σχέση του ερωτήματος β) με $x-1 < 0$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-1} &\geq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \geq \frac{3x^2-4x+1}{x-1} \xRightarrow{3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1)} \\ &\Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \geq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \geq \frac{\cancel{(x-1)}(3x-1)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} x+1 &\geq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \geq 3x-1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-1) = 2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2} \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

14.16 3)

$$2x^2-3x-1 \leq f(x) \leq x^2+x-5 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=2} 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 1 \leq f(x) \leq 2^2 + 2 - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq f(2) \leq 1 \Rightarrow \boxed{f(2)=1}$$

Ακόμη

$$2x^2-3x-1 \leq f(x) \leq x^2+x-5 \Rightarrow 2x^2-3x-2 \leq f(x)-1 \leq x^2+x-6 \xRightarrow{f(2)=1}$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x-2 \leq f(x)-f(2) \leq x^2+x-6 \quad (1)$$

Έστω $x > 2$. Διαιρούμε την σχέση (1) με $x-2 > 0$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2x^2-3x-2}{x-2} &\leq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq \frac{x^2+x-6}{x-2} \xRightarrow{\begin{array}{l} 2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2) \\ x^2+x-6=(x-2)(x+3) \end{array}} \\ &\Rightarrow \frac{(2x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} \leq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x+1 &\leq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq x+3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+1) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+3) = 5 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 5} \quad (2) \end{aligned}$$

Ομοίως αν $x < 2$. Διαιρούμε την σχέση (1) με $x-2 < 0$ και έχουμε

$$\Rightarrow \frac{2x^2-3x-2}{x-2} \geq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \geq \frac{x^2+x-6}{x-2} \xRightarrow{\begin{array}{l} 2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2) \\ x^2+x-6=(x-2)(x+3) \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{(2x+1)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} \geq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \geq \frac{(\cancel{x-2})(x+3)}{\cancel{x-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x+1 &\geq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \geq x+3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+1) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+3) = 5 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 5} \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 5 \Rightarrow f'(2) = 5$$

14.16 4)

$$\text{Έχουμε } f(x) \geq g(x) \geq h(x) \quad \overset{f(1)=g(1)=h(1)}{\Rightarrow} \quad f(x)-f(1) \geq g(x)-g(1) \geq h(x)-h(1) \quad (1)$$

Έστω $x > 1$. Διαιρούμε την σχέση (1) με $x-1 > 0$ και έχουμε

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \geq \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \geq \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &\geq \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \geq \frac{h(x)-h(1)}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = f'(1) = h'(1) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 3} \quad (2)$$

Ομοίως αν $x < 0$. Διαιρούμε την σχέση (1) με $x-1 < 0$ και έχουμε

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \leq \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &\leq \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \leq \frac{h(x)-h(1)}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = f'(1) = h'(1) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 3} \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 3 \Rightarrow g'(1) = 3$$