Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

14.15 1)

α) Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x-3}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 3}h(x)=-7$ και ακόμη

$$h(x)=\frac{f(x)}{x-3}\Rightarrow f(x)=(x-3)h(x)\Rightarrow \lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}(x-3)h(x)\overset{\lim\limits_{x\to 3}h(x)=-7}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}f(x)=(3-3)\cdot(-7)\Rightarrow \lim_{x\to 3}f(x)=0\overset{f:\text{συνεχής στο } x_o=3}{\Rightarrow} f(3)=0$$

β) $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}\overset{f(3)=0}{=}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-7$

14.15 2)

α) Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=4$ και ακόμη

$$h(x)=\frac{f(x)}{x-1}\Rightarrow f(x)=(x-1)h(x)\Rightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)h(x)\overset{\lim\limits_{x\to 1}h(x)=4}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=(1-1)\cdot 4\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 1}f(x)=0}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_o=1$, θα είναι $\boxed{f(1)}=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\boxed{0}$

β) $\boxed{f'(1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{f(1)=0}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\boxed{4}$,

14.15 3)

Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\alpha$ και ακόμη

$$h(x)=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=x\cdot h(x)\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\cdot h(x)\overset{\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\alpha}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=0\cdot\alpha\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}f(x)=0}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, θα είναι $\boxed{f(0)}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\boxed{0}$

Οπότε $\boxed{f'(0)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\overset{f(3)=0}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\boxed{\alpha}$

14.15 4)

α) Θέτουμε $g(h)=\dfrac{f(2+h)}{h}$, οπότε $\lim\limits_{h\to 0}g(h)=5$ και ακόμη

$$g(h)=\frac{f(2+h)}{h}\Rightarrow f(2+h)=h\cdot g(h)\Rightarrow \lim_{h\to 0}f(2+h)=\lim_{h\to 0}\left[h\cdot g(h)\right]\overset{\lim\limits_{h\to 0}g(h)=5}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}f(2+h)=0\overset{\substack{\text{θέτουμε } x=2+h\\ \text{όταν } h\to 0\ ,\ x\to 2}}{\Rightarrow}\lim_{x\to 2}f(x)=0\overset{f:\text{συνεχής στο } x_o=3}{\Rightarrow} f(2)=0$$

β) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(1)}{h}\overset{f(2)=0}{=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)}{h}=5$

14.15 5)

α) Θέτουμε $g(h)=\dfrac{f(1+h)}{h}$, οπότε $\lim\limits_{h\to 0}g(h)=-4$ και ακόμη

$$g(h)=\frac{f(1+h)}{h}\Rightarrow f(1+h)=h\cdot g(h)\Rightarrow \lim_{h\to 0}f(1+h)=\lim_{h\to 0}\left[h\cdot g(h)\right]\overset{\lim_{h\to 0}g(h)=-4}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}f(1+h)=0\cdot(-4)\Rightarrow \lim_{h\to 0}f(1+h)=0\overset{\substack{\text{θέτουμε } x=1+h\\ \text{όταν } h\to 0\ ,\ x\to 1}}{\Rightarrow}\lim_{x\to 1}f(x)=0\Rightarrow$$

$$\overset{f:\text{συνεχής στο } x_o=1}{\Rightarrow} f(1)=0$$

β) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\overset{f(1)=0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=-4$

14.15 6)

α) Θέτουμε $g(h)=\frac{f(x_o+h)}{h}$, οπότε $\lim_{h\to 0}g(h)=1$ και ακόμη

$$g(h)=\frac{f(x_o+h)}{h}\Rightarrow f(x_o+h)=h\cdot g(h)\Rightarrow \lim_{h\to 0}f(x_o+h)=\lim_{h\to 0}\left[h\cdot g(h)\right]\overset{\lim_{h\to 0}g(h)=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}f(x_o+h)=0\cdot 5\Rightarrow \lim_{h\to 0}f(x_o+h)=0\overset{\substack{\text{θέτουμε } x=x_o+h\\ \text{όταν } h\to 0\ ,\ x\to x_o}}{\Rightarrow}\boxed{\lim_{x\to x_o}f(x)=0}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_o , θα είναι $\boxed{f(x_o)}=\lim_{x\to x_o}f(x)=\boxed{0}$

β) $\boxed{f'(x_o)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}\overset{f(x_o)=0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)}{h}=\boxed{1}$,