

14.14 1)

Επειδή στο $x_0 = 2$, η g είναι συνεχής, θα είναι $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ (1)

Ακόμη $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, οπότε

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)(x+1)g(x) & , x \leq -1 \text{ ή } x \geq 2 \\ -(x-2)(x+1)g(x) & , -1 < x < 2 \end{cases}$$

Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \stackrel{f(x) = (x-2)(x+1)g(x), f(2)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)g(x)}{\cancel{x-2}} \stackrel{(1)}{=} \boxed{3g(2)} \quad (2)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \stackrel{f(x) = -(x-2)(x+1)g(x), f(2)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-\cancel{(x-2)}(x+1)g(x)}{\cancel{x-2}} \stackrel{(1)}{=} \boxed{-3g(2)} \quad (3)$$

Οπότε $\boxed{\eta f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 2}$, όταν και μόνο όταν ($\Leftrightarrow$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \stackrel{(2), (3)}{\Leftrightarrow} 3g(2) = -3g(2) \Leftrightarrow 6g(2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{g(2) = 0}$$

14.14 2)

Επειδή στο $x_0 = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη, θα είναι $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ (1)

Ακόμη

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \geq 0 \\ f(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \quad (2)$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-x) - f(0)}{x} \stackrel{\text{θέτουμε } y = -x \Rightarrow x = -y}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y) - f(0)}{-y} = \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y) - f(0)}{y} = -f'(0) \quad (3) \end{aligned}$$

Οπότε αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} \stackrel{(2), (3)}{\Leftrightarrow} f'(0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(0) = 0}$$

14.14 3)

Είναι

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)g(x) & , x \geq 1 \\ -(x-1)g(x) & , x < 1 \end{cases}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)g(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}g(x)}{\cancel{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \stackrel{g; \text{συνεχής στο } x_0=1}{=} g(1) \quad (1)$$

και

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)g(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)}g(x)}{\cancel{x-1}} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \stackrel{g; \text{συνεχής στο } x_0=1}{=} -g(1) \quad (2)$$

Επειδή στο $x_0 = 1$, η f είναι παραγωγίσιμη, θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} g(1) = -g(1) \Rightarrow 2g(1) = 0 \Rightarrow \boxed{g(1) = 0}$$

που σημαίνει ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 1