

14.13 1)

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \stackrel{f(x)=\lambda x + \mu}{f(2)=2^3=8} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lambda x + \mu - 8}{x - 2}$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ θα πρέπει το $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lambda x + \mu - 8}{x - 2}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός

Επειδή όμως $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0$, θα πρέπει αναγκαία και $\lim_{x \rightarrow 2^-} (\lambda x + \mu - 8) = 0$ διότι

διαφορετικά το $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lambda x + \mu - 8}{x - 2}$ θα ήταν είτε $+\infty$, είτε $-\infty$ είτε δεν θα υπήρχε

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (\lambda x + \mu - 8) = 0 \Rightarrow 2\lambda + \mu - 8 = 0 \quad (1)$$

και έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lambda x + \mu - 8}{x - 2} \stackrel{(1) \Rightarrow \mu = 8 - 2\lambda}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lambda x + \cancel{8} - 2\lambda - \cancel{8}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lambda(x - 2)}{\cancel{x - 2}} = \boxed{\lambda}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &\stackrel{f(x)=x^3}{f(2)=2^3=8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \stackrel{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{x - 2}} = \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = \boxed{12} \end{aligned}$$

Όμως, για να είναι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Rightarrow \boxed{\lambda = 12}$$

Ακόμη

$$(1) \stackrel{\lambda=12}{\Rightarrow} \boxed{\mu = -16}$$

14.13 2)

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(x)=\lambda x + 3}{f(1)=\mu 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = \mu + 6} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda x + 3 - \mu - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda x - \mu - 3}{x - 1}$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ θα πρέπει το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda x - \mu - 3}{x - 1}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός

Επειδή όμως $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$, θα πρέπει αναγκαία και $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\lambda x - \mu - 3) = 0$ διότι

διαφορετικά το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda x - \mu - 3}{x - 1}$ θα ήταν είτε $+\infty$, είτε $-\infty$ είτε δεν θα υπήρχε

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\lambda x - \mu - 3) = 0 \Rightarrow \lambda - \mu - 3 = 0 \quad (1)$$

και έτσι

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda x - \mu - 3 \stackrel{(1) \Rightarrow \mu = \lambda - 3}{}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda x - \lambda + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda \cancel{(x - 1)}}{\cancel{x - 1}} = \boxed{\lambda}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} & \stackrel{\substack{f(x) = \mu x^2 + 2x + 4 \\ f(1) = \mu 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = \mu + 6}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\mu x^2 + 2x + 4 - \mu - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\mu x^2 + 2x - \mu - 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\mu(x^2 - 1) + 2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\mu(x - 1)(x + 1) + 2(x - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)[\mu(x + 1) + 2]}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x - 1)}(\mu x + \mu + 2)}{\cancel{x - 1}} = \mu + \mu + 2 = \boxed{2\mu + 2} \end{aligned}$$

Όμως, για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow \lambda = 2\mu + 2 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\boxed{\lambda = 4}$ και $\boxed{\mu = 1}$

14.13 3)

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \stackrel{\substack{f(x) = x^2 + x + 1 \\ f(-1) = \lambda(-1) + \mu = -\lambda + \mu}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x + 1 + \lambda - \mu}{x + 1}$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ θα πρέπει το

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x + 1 + \lambda - \mu}{x + 1} \text{ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός}$$

Επειδή όμως $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1) = 0$, θα πρέπει αναγκαστικά και $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + x + 1 + \lambda - \mu) = 0$

διότι διαφορετικά το $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x + 1 + \lambda - \mu}{x + 1}$ θα ήταν είτε $+\infty$, είτε $-\infty$ είτε δεν θα υπήρχε

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + x + 1 + \lambda - \mu) = 0 \Rightarrow (-1)^2 - 1 + 1 + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda - \mu + 1 = 0 \quad (1)$$

και έτσι

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x + 1 + \lambda - \mu \stackrel{(1) \Rightarrow \mu = \lambda + 1}{}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x + \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda}}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x \cancel{(x + 1)}}{\cancel{x + 1}} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

Ακόμη

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}} \stackrel{\substack{f(x) = \lambda x + \mu \\ f(-1) = \lambda(-1) + \mu = -\lambda + \mu}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\lambda x + \cancel{\mu} + \lambda - \cancel{\mu}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\lambda \cancel{(x + 1)}}{\cancel{x + 1}} = \boxed{\lambda}$$

Όμως, για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \Rightarrow \boxed{\lambda = -1} \quad (2)$$

Ακόμη

$$(1) \Rightarrow \boxed{\mu = 0}$$

14.13 4)

Είναι

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}} \stackrel{\substack{f(x)=x^2 \\ f(\xi)=\xi^2}}{=} \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{x^2 - \xi^2}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{(x - \xi)(x + \xi)}{x - \xi} = \xi + \xi = \boxed{2\xi}$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - \xi} \stackrel{\substack{f(x)=\lambda x + \mu \\ f(\xi)=\xi^2}}{=} \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{\lambda x + \mu - \xi^2}{x - \xi}$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = \xi$ θα πρέπει το $\lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{\lambda x + \mu - \xi^2}{x - \xi}$ να

υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός

Επειδή όμως $\lim_{x \rightarrow \xi^+} (x - \xi) = 0$, θα πρέπει αναγκαία και $\lim_{x \rightarrow \xi^+} (\lambda x + \mu - \xi^2) = 0$ διότι

διαφορετικά το $\lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{\lambda x + \mu - \xi^2}{x - \xi}$ θα ήταν είτε $+\infty$, είτε $-\infty$ είτε δεν θα υπήρχε

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} (\lambda x + \mu - \xi^2) = 0 \Rightarrow \lambda \xi + \mu - \xi^2 = 0 \quad (1)$$

και έτσι

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - \xi}} &= \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{\lambda x + \mu - \xi^2}{x - \xi} \stackrel{(1) \Rightarrow \mu = \xi^2 - \lambda \xi}{=} \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{\lambda x + \cancel{\xi^2} - \lambda \xi - \cancel{\xi^2}}{x - \xi} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{\lambda (x - \xi)}{x - \xi} = \boxed{\lambda} \end{aligned}$$

Όμως, για να είναι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \xi$, θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - \xi} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2\xi}$$

Ακόμη

$$(1) \stackrel{\lambda = 2\xi}{\Rightarrow} \boxed{\mu = -\xi^2}$$