Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Α

14.11 1)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{\substack{f(x)=x+1\\ f(1)=1+1=2}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{x+1-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}=1$$

Ακόμη

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{\substack{f(x)=2\sqrt{x}\\ f(1)=1+1=2}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}\lim_{x\to1^+}\frac{2\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$, άρα $f'(1)=1$

14.11 2)

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\overset{\substack{f(x)=1+8\sqrt{x}\\ f(4)=1+8\sqrt{4}=17}}{=}\lim_{x\to4^-}\frac{1+8\sqrt{x}-17}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{8\sqrt{x}-16}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{8\left(\sqrt{x}-2\right)}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to4^-}\frac{8\left(\sqrt{x}-2\right)}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{8\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4^-}\frac{8\left(\sqrt{x}^2-2^2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4^-}\frac{8\,\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{8}{\sqrt{4}+2}=\frac{8}{4}=2$$

$$\lim_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\overset{\substack{f(x)=2x+9\\ f(4)=1+8\sqrt{4}=17}}{=}\lim_{x\to4^+}\frac{2x+9-17}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\frac{2x-8}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\frac{2\,\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}=2$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=2$, άρα $f'(2)=2$

14.11 3)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{\substack{f(x)=3x^2-5x+6\\ f(1)=3\cdot1^2-5\cdot1+6=4}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-5x+6-4}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-5x+2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\,(3x-2)}{\cancel{x-1}}=3\cdot1-2=1$$

Ακόμη

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{\substack{f(x)=2\sqrt{x^2+3}\\ f(1)=3\cdot1^2-5\cdot1+6=4}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{2\sqrt{x^2+3}-4}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}^2-2^2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\left(x^2+3-4\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\left(x^2-1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{2(1+1)}{\sqrt{1^2+3}+2}=\frac{4}{4}=1$$

Παρατηρούμε ότι $\boxed{\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1}$, άρα $f'(1)=1$