

14.10 1)

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 3 - 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x-1)}{x-1} = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x + 2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(x+1)}{x-1} = 1 \cdot (1+1) = 2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$, άρα $f'(1) = 2$

β) Παρατηρούμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = -2$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - x) = (-2)^2 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^3 - x + 2) = (-2)^3 - (-2) + 2 = -8 + 2 + 2 = -4$$

δηλαδή $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$. Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -2$

14.10 2)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x - 4 - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5(x-2)}{x-2} = 5$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = 2 + 3 = 5$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5$, άρα $f'(2) = 5$

14.10 3)

Παρατηρούμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = -1$$

Άρα η f δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

14.10 4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 - 1 - 7}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 - 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2(x-2)(x+2)}{x+2} = 2(-2-2) = -8 \end{aligned}$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \stackrel{f(x)=5-x}{f(-2)=7} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5-x-7}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\cancel{-(x+2)}}{\cancel{x+2}} = -1$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -2$

14.10 5)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \stackrel{f(x)=x^3+2x+1}{f(-1)=-2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x + 1 - (-2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x + 1 + 2}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x + 3}{x + 1} \stackrel{x^3+2x+3: \text{ρίζα το } x=-1 \text{ παραγοντοποίηση με Horner}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 3)}{\cancel{x+1}} = (-1)^2 - (-1) + 3 = 5$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &\stackrel{f(x)=5x+3}{f(-1)=-2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5x + 3 - (-2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5x + 3 + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5x + 5}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = 5 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 5$, άρα $f'(-1) = 5$