

11.9 1)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [0, 2]$

Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} m \leq f(0) \leq M \\ m \leq f(1) \leq M \\ m \leq f(2) \leq M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow 3m \leq f(0) + f(1) + f(2) \leq 3M \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M}$$

Προφανώς το σύνολο τιμών της f είναι το $[m, M]$, οπότε αφού

$$\Rightarrow m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M, \text{ προκύπτει ότι ο αριθμός } \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \text{ ανήκει}$$

στο σύνολο τιμών της συνάρτησης άρα υπάρχει $\xi \in [0, 2]$, τέτοιο ώστε,

$$f(\xi) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3}$$

11.9 2)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} m \leq f(x_1) \leq M \\ m \leq f(x_2) \leq M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow 2m \leq f(x_1) + f(x_2) \leq 2M \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq M}$$

Προφανώς το σύνολο τιμών της f είναι το $[m, M]$, οπότε αφού

$$\Rightarrow m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq M, \text{ προκύπτει ότι ο αριθμός } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \text{ ανήκει στο}$$

σύνολο τιμών της συνάρτησης άρα υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε,

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

11.9 3)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} m \leq f(x_1) \leq M \Rightarrow \kappa m \leq \kappa f(x_1) \leq \kappa M \\ m \leq f(x_2) \leq M \Rightarrow \lambda m \leq \lambda f(x_2) \leq \lambda M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow (\kappa + \lambda)m \leq \kappa f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq (\kappa + \lambda)M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(\cancel{\kappa + \lambda})m}{\cancel{\kappa + \lambda}} \leq \frac{\kappa f(x_1) + \lambda f(x_2)}{\kappa + \lambda} \leq \frac{(\cancel{\kappa + \lambda})M}{\cancel{\kappa + \lambda}} \Rightarrow \boxed{m \leq \frac{\kappa f(x_1) + \lambda f(x_2)}{\kappa + \lambda} \leq M}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής το σύνολο τιμών της f θα είναι το $f(A) = [m, M]$

$$\text{Αφού λοιπόν } m \leq \frac{\kappa f(x_1) + \lambda f(x_2)}{\kappa + \lambda} \leq M \Rightarrow \frac{\kappa f(x_1) + \lambda f(x_2)}{\kappa + \lambda} \in f(A)$$

$$\text{Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in [a, b], \text{ τέτοιο ώστε } f(\xi) = \frac{\kappa f(x_1) + \lambda f(x_2)}{\kappa + \lambda}$$

11.9 4)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$

Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} m \leq f(\kappa) \leq M \\ m \leq f(\lambda) \leq M \\ m \leq f(\mu) \leq M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow \end{array} 3m \leq f(\kappa) + f(\lambda) + f(\mu) \leq 3M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m \leq \frac{f(\kappa) + f(\lambda) + f(\mu)}{3} \leq M}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής το σύνολο τιμών της f θα είναι το $f(A) = [m, M]$

$$\text{Αφού λοιπόν } m \leq \frac{f(\kappa) + f(\lambda) + f(\mu)}{3} \leq M \Rightarrow \frac{f(\kappa) + f(\lambda) + f(\mu)}{3} \in f(A)$$

$$\text{Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in [a, b], \text{ τέτοιο ώστε } f(\xi) = \frac{f(\kappa) + f(\lambda) + f(\mu)}{3}$$

11.9 5)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$

Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} m \leq f(x_1) \leq M \\ m \leq f(x_2) \leq M \\ m \leq f(x_3) \leq M \\ \dots\dots\dots \\ m \leq f(x_v) \leq M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow \end{array} vm \leq f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_v) \leq vM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_v)}{v} \leq M}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής το σύνολο τιμών της f θα είναι το $f(A) = [m, M]$

$$\text{Αφού λοιπόν } m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_v)}{v} \leq M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_v)}{v} \in f(A)$$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [a, \beta]$, τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_v)}{v}$$