

11.8 1)

α) Η f προφανώς είναι συνεχής. Ακόμη έστω $x_1, x_2 \in [2, 5]$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 2} 2x_1 < 2x_2 \xRightarrow{\text{αφαιρούμε } 1} 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [2, 5]$ θα είναι

$$A = [2, 5] \xRightarrow{f \nearrow} f(A) = [f(2), f(5)] \xRightarrow{\substack{f(2)=3 \\ f(5)=9}} f(A) = [3, 9]$$

β) Η f προφανώς είναι συνεχής. Ακόμη έστω $x_1, x_2 \in (-1, 7)$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -5} -5x_1 > -5x_2 \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 4} -5x_1 + 4 > -5x_2 + 4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-1, 7)$ θα είναι

$$A = (-1, 7) \xRightarrow{f \searrow} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) \xRightarrow{\substack{\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = -31 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 9}} f(A) = (-31, 9)$$

γ) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και προφανώς είναι συνεχής

Ακόμη έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 3} 3e^{-x_1} > 3e^{-x_2} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 2} 3e^{-x_1} + 2 > 3e^{-x_2} + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ θα είναι

$$A = (-\infty, +\infty) \xRightarrow{f \searrow} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) \xRightarrow{\substack{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \cdot (+\infty) + 2 = +\infty}} = (2, +\infty)$$

11.8 2)

Έστω $x_1, x_2 \in [-3, 8]$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 2} x_1 + 2 < x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-3, 8]$ θα είναι

$$A = [-3, 8] \xRightarrow{f \nearrow} f(A) = [f(-3), f(8)] \xRightarrow{\substack{f(-3)=-1 \\ f(8)=10}} f(A) = [-1, 10]$$

11.8 3)

Έστω $x_1, x_2 \in [3, 10]$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -2} -2x_1 > -2x_2 \xRightarrow{\text{αφαιρούμε } 5} -2x_1 - 5 > -2x_2 - 5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [3, 10]$ θα είναι

$$A = [3, 10] \xRightarrow{f \searrow} f(A) = [f(10), f(3)] \xRightarrow{\substack{f(10)=-25 \\ f(3)=-11}} f(A) = [-25, -11]$$

11.8 4)

Έστω $x_1, x_2 \in (0, 4)$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 3} 3x_1 < 3x_2 \xRightarrow{\text{αφαιρούμε } 1} 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, 4)$ θα είναι

$$A = (0, 4) \xRightarrow{f} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \right) \xRightarrow{\begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 11 \end{matrix}} f(A) = (-1, 11)$$

11.8 5)

Έστω $x_1, x_2 \in (-9, 6)$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -1} -x_1 > -x_2 \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 9} -x_1 + 9 < -x_2 + 9 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-9, 6)$ θα είναι

$$A = (-9, 6) \xRightarrow{f} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -9^+} f(x) \right) \xRightarrow{\begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -9^+} f(x) = 18 \end{matrix}} f(A) = (3, 18)$$

11.8 6)

Έστω $x_1, x_2 \in (1, 7]$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 5} 5x_1 < 5x_2 \xRightarrow{\text{αφαιρούμε } 4} 5x_1 - 4 < 5x_2 - 4 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (1, 7]$ θα είναι

$$A = (1, 7] \xRightarrow{f} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), f(7) \right] \xRightarrow{\begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \\ f(7) = 31 \end{matrix}} f(A) = (1, 31]$$

11.8 7)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 5} 5e^{x_1} < 5e^{x_2} \xRightarrow{\text{αφαιρούμε } 2} 5e^{x_1} - 2 < 5e^{x_2} - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ θα είναι

$$A = (-\infty, +\infty) \xRightarrow{f} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \xRightarrow{\begin{matrix} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5 \cdot 0 - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \cdot (+\infty) - 2 = +\infty \end{matrix}} f(A) = (-2, +\infty)$$

11.8 8)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -1} -x_1 > -x_2 \xRightarrow{\frac{1}{2} < 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x_1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-x_2} \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 4} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{-x_1} < 4\left(\frac{1}{2}\right)^{-x_2} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 6} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{-x_1} + 6 < 4\left(\frac{1}{2}\right)^{-x_2} + 6 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ θα είναι

$$A = (-\infty, +\infty) \xRightarrow{f'} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \xRightarrow{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \cdot 0 + 6 = 6, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 \cdot (+\infty) + 6 = +\infty} f(A) = (6, +\infty)$$

11.8 9)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 2} 2 \ln x_1 < 2 \ln x_2 \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 5} \\ &\Rightarrow 2 \ln x_1 + 5 < 2 \ln x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ θα είναι

$$A = (0, +\infty) \xRightarrow{f'} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \xRightarrow{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

11.8 10)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -1} -\ln x_1 > -\ln x_2 \xRightarrow{\text{αφαιρούμε } 2} \\ &\Rightarrow -\ln x_1 - 2 > -\ln x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

Οπότε επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ θα είναι

$$A = (0, +\infty) \xRightarrow{f'} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) \xRightarrow{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty - 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty + 2} f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$