

11.6 1)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η f παίρνει στο $[α, β]$ μια μέγιστη τιμή

δηλαδή

υπάρχει $x_0 \in [α, β]$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in [α, β]$$

άρα

$$g(x) + e^{x-1} \leq g(x_0) + e^{x_0-1} \text{ για κάθε } x \in [α, β]$$

11.6 2)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η f παίρνει στο $[α, β]$ μια ελάχιστη τιμή

δηλαδή

υπάρχει $x_0 \in [α, β]$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in [α, β]$$

άρα

$$g^2(x) + g(x) - x \geq g^2(x_0) + g(x_0) - x_0 \text{ για κάθε } x \in [α, β]$$

11.6 3)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η f παίρνει στο $[α, β]$ μια ελάχιστη τιμή

δηλαδή

υπάρχει $x_0 \in [α, β]$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in [α, β]$$

άρα

$$\sqrt{x^2 + g^2(x)} \geq \sqrt{x_0^2 + g^2(x_0)} \Rightarrow x^2 + g^2(x) \geq x_0^2 + g^2(x_0) \text{ για κάθε } x \in [α, β]$$

11.6 4)

Η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η g παίρνει στο $[α, β]$ μια ελάχιστη τιμή

δηλαδή

υπάρχει $x_0 \in [α, β]$ τέτοιο ώστε

$g(x) \geq g(x_0)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι

$$\frac{2f(x)}{x^2+1} \geq \frac{2f(x_0)}{x_0^2+1} \stackrel{(x^2+1)(x_0^2+1)>0}{\Rightarrow} \cancel{(x^2+1)}(x_0^2+1)\frac{2f(x)}{\cancel{x^2+1}} \geq (x^2+1)\cancel{(x_0^2+1)}\frac{2f(x_0)}{\cancel{x_0^2+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x)(x_0^2+1) \geq 2f(x_0)(x^2+1) \Rightarrow 2f(x)x_0^2 + 2f(x) \geq 2f(x_0)x^2 + 2f(x_0)$$

$$\Rightarrow 2f(x) - 2f(x_0) \geq 2x^2f(x_0) - 2x_0^2f(x) \stackrel{\text{διαιρούμε με 2}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{2f(x)}{2} - \frac{2f(x_0)}{2} \geq \frac{2x^2f(x_0)}{2} - \frac{2x_0^2f(x)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq x^2f(x_0) - x_0^2f(x)$$