

11.4 1)

α) $f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=3} f(3) \cdot f(f(3)) = 1 \xRightarrow{f(3)=2} 2 \cdot f(2) = 1 \Rightarrow \boxed{f(2) = \frac{1}{2}}$

β) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 3]$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = \frac{1}{2} \text{ (από ερώτημα α)} \\ f(3) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) < 1 < f(3)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1$

Επομένως

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0) \cdot f(f(x_0)) = 1 \xRightarrow{f(x_0)=1} 1 \cdot f(1) = 1 \Rightarrow \boxed{f(1) = 1}$$

11.4 2)

α) $f(x) \cdot f(f(x)) = 48 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1} f(1) \cdot f(f(1)) = 48 \xRightarrow{f(1)=4} 4 \cdot f(4) = 48 \Rightarrow \boxed{f(4) = 12}$

β) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 4]$

$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 12 \text{ (από ερώτημα α)} \\ f(1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) < 6 < f(4)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 6$

Επομένως

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 48 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0) \cdot f(f(x_0)) = 48 \xRightarrow{f(x_0)=6} 6 \cdot f(6) = 48 \Rightarrow \boxed{f(6) = 8}$$

11.4 3)

α) $f(x) \cdot f(f(x)) = 30 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=2} f(2) \cdot f(f(2)) = 30 \xRightarrow{f(2)=3} 3 \cdot f(3) = 30 \Rightarrow \boxed{f(3) = 10}$

β) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 3]$

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 10 \text{ (από ερώτημα α)} \\ f(2) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) < 5 < f(3)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 5$

Επομένως

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 30 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0) \cdot f(f(x_0)) = 30 \xRightarrow{f(x_0)=5} 5 \cdot f(5) = 30 \Rightarrow \boxed{f(5) = 6}$$