

11.3 1)

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$f(1) < \frac{f(1)+f(2)}{2} \Leftrightarrow 2f(1) < f(1)+f(2) \Leftrightarrow f(1) < f(2) \text{ που ισχύει}$$

$$\text{άρα } f(1) < \frac{f(1)+f(2)}{2} \quad (1)$$

και ομοίως

$$\frac{f(1)+f(2)}{2} < f(2) \Leftrightarrow f(1)+f(2) < 2f(2) \Leftrightarrow f(1) < f(2) \text{ που ισχύει}$$

$$\text{άρα } \frac{f(1)+f(2)}{2} < f(2) \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2)} \Rightarrow f(1) < \frac{f(1)+f(2)}{2} < f(2)$$

β) Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$,

- $f(1) < \frac{f(1)+f(2)}{2} < f(2)$

οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f(\xi) = \frac{f(1)+f(2)}{2}$$

11.3 2)

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$f(\alpha) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \Leftrightarrow 2f(\alpha) < f(\alpha)+f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \text{ που ισχύει}$$

$$\text{άρα } f(\alpha) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \quad (1)$$

και ομοίως

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta) < 2f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \text{ που ισχύει}$$

$$\text{άρα } \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} < f(\beta) \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2)} \Rightarrow f(\alpha) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} < f(\beta)$$

β) Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

Πράγματι

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$,

$$f(\alpha) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} < f(\beta)$$

οπότε από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

11.3 3)

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} f(\alpha) < \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} &\stackrel{f(\alpha) > 0}{\Leftrightarrow} f^2(\alpha) < \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)}^2 \Leftrightarrow f^2(\alpha) < f(\alpha) \cdot f(\beta) \stackrel{f(\alpha) > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

$$\text{άρα } f(\alpha) < \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} \quad (1)$$

και ομοίως

$$\begin{aligned} \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} < f(\beta) &\stackrel{f(\beta) > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)}^2 < f^2(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) \cdot f(\beta) < f^2(\beta) \stackrel{f(\beta) > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

$$\text{άρα } \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} < f(\beta) \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) } \Rightarrow f(\alpha) < \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} < f(\beta)$$

β) Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)}$$

Πράγματι

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$,

$$f(\alpha) < \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} < f(\beta)$$

οπότε από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f(\xi) = \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)}$$