

α) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

β) Επειδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ οι αριθμοί m και M θα είναι επίσης θετικοί. Έχουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} m \leq f(\alpha) \leq M &\Rightarrow \frac{1}{m} \geq \frac{1}{f(\alpha)} \geq \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{M} \leq \frac{1}{f(\alpha)} \leq \frac{1}{m} \\ m \leq f(\beta) \leq M &\Rightarrow \frac{1}{m} \geq \frac{1}{f(\beta)} \geq \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{M} \leq \frac{1}{f(\beta)} \leq \frac{1}{m} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{M} \leq \frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)} \leq \frac{2}{m} \quad \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{με } \frac{mM}{2} > 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mM}{2} \left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)} \right) \leq \frac{mM}{2} \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m \leq \frac{mM}{2} \left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)} \right) \leq M}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής το σύνολο τιμών της f θα είναι το $f(A) = [m, M]$

$$\text{Αφού λοιπόν } m \leq \frac{mM}{2} \left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)} \right) \leq M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mM}{2} \left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)} \right) \in f(A)$$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{mM}{2} \left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)} \right)$$