

Προφανώς αν ισχύει $f(1) = f(2)$ ή $f(1) = f(3)$ ή $f(2) = f(3)$ η συνάρτηση f δεν είναι 1-1

Έστω λοιπόν ότι $f(1) < f(2) < f(3)$ (ομοίως εργαζόμαστε αν η σειρά είναι διαφορετική)

Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} f(1) < f(3) \\ f(2) < f(3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη} \\ f(1), f(2), f(3); \text{θετικοί} \end{array} \Rightarrow f(1)f(2) < f^2(3) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } f(3) > 0} f(1)f(2)f(3) < f^3(3)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) > f(1) \\ f(3) > f(1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη} \\ f(1), f(2), f(3); \text{θετικοί} \end{array} \Rightarrow f(2)f(3) > f^2(1) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } f(1) > 0} f(1)f(2)f(3) > f^3(1)$$

$$\text{Οπότε } f^3(1) < f(1)f(2)f(3) < f^3(3) \xrightarrow{f(1), f(2), f(3); \text{θετικοί}} f(1) < \sqrt[3]{f(1)f(2)f(3)} < f(3) \quad (1)$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$

και

$$f(1) < \sqrt[3]{f(1)f(2)f(3)} < f(3)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 3)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f(x_0) = \sqrt[3]{f(1)f(2)f(3)} \Rightarrow f^3(x_0) = f(1)f(2)f(3) \xrightarrow{f^3(4)=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)}$$

$$\Rightarrow f^3(x_0) = f^3(4) \xrightarrow{\text{περιττή δύναμη}} \boxed{f(x_0) = f(4)} \text{ ενώ } x_0 \neq 4 \text{ αφού } x_0 \in (1, 3)$$

Άρα η f δεν είναι 1-1