

11.14

Προφανώς για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \leq M$ και $g(x) \leq M$

Έστω $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $f(x_1) = g(x_2) = M$

Αν $x_1 = x_2$ τότε για $\xi = x_1 \in [0,1]$ είναι $f(\xi) = g(\xi)$

Έστω $x_1 < x_2$. Τότε

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(x_1) &= f(x_1) - g(x_1) \stackrel{f(x_1)=M}{=} M - g(x_1) \stackrel{g(x) \leq M}{\geq} 0 \\ h(x_2) &= f(x_2) - g(x_2) \stackrel{g(x_2)=M}{=} f(x_2) - M \stackrel{f(x) \leq M}{\leq} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(x_1) \cdot h(x_2) \leq 0$$

Αν $h(x_1) = 0$ τότε για $\xi = x_1 \in [0,1]$ έχουμε $h(\xi) = 0$

Αν $h(x_2) = 0$ τότε για $\xi = x_2 \in [0,1]$ έχουμε $h(\xi) = 0$

Αν $h(x_1) \neq 0$ και $h(x_2) \neq 0$ τότε προφανώς $h(x_1)h(x_2) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ (άρα $\xi \in [0,1]$) τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) - g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = g(\xi)$$