

11.13

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f δεν μηδενίζεται. Πράγματι
Έστω ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ με $f(\gamma) = 0$. Τότε

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\gamma, \beta]$

$$0 < f(\alpha) < f(\beta) \stackrel{f(\gamma)=0}{\Rightarrow} f(\gamma) < f(\alpha) < f(\beta)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\gamma, \beta)$

τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(\alpha) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} x_0 = \alpha$, άτοπο διότι προφανώς $\gamma \neq \alpha$ αφού

$$\alpha < \gamma < x_0 < \beta$$

Άρα η συνάρτηση δεν μηδενίζεται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επειδή είναι και συνεχής
θα διατηρεί πρόσημο

και επειδή $f(\beta) > 0$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$