

11.11

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\pi}{6} \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} \eta\mu \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 1 < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (\pi \approx 3,14\dots\dots)$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο ώστε $f(\xi) = 1$

Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι

Έστω $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \quad (2) \quad (\text{η } \eta\mu \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } 1\text{o} \text{ τεταρτημόριο})$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη (έχουν όλα τα μέλη τους θετικά στο 1ο τεταρτημόριο) έχουμε

$$x_1 \cdot \eta\mu x_1 < x_2 \cdot \eta\mu x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και 1 – 1

Επομένως το ξ που βρήκαμε παραπάνω θα είναι μοναδικό