

10.6 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 1 = -1 - 4 - 1 + 1 = -5 < 0 \\ f(0) &= 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 0 + 1 = 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^3 + x + 1 = 4x^2$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$

Επίσης, η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 0 + 1 = 1 > 0 \\ f(1) &= 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1 - 4 + 1 + 1 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^3 + x + 1 = 4x^2$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Επομένως η εξίσωση $x^3 + x + 1 = 4x^2$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

10.6 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-\pi) &= (-\pi)^2 - (-\pi)\overset{\eta\mu(-\pi)=0}{\underset{\sigma\upsilon\nu(-\pi)=-1}{=}} \pi^2 + 1 > 0 \\ f(0) &= 0^2 - 0 \cdot \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-\pi)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $[-\pi, 0]$

Επίσης, η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 0 \cdot \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0 \\ f(\pi) &= \pi^2 - \pi\overset{\eta\mu\pi=0}{\underset{\sigma\upsilon\nu\pi=-1}{=}} \pi^2 + 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(\pi) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $[0, \pi]$

Επομένως η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-\pi, 0)$ και τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$