

10.51

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - x$. Θα αποδείξουμε ότι η h έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων) στο $\mathbb{R}$ και $h(0) = f(0)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $f(0) = 0$ τότε η h έχει ρίζα το $x_0 = 0$
- Αν $f(0) > 0$. Τότε

$$f(0) > 0 \xRightarrow{f: \text{φθίνουσα}} f(f(0)) \leq f(0) \Rightarrow f(f(0)) - f(0) \leq 0 \Rightarrow h(f(0)) \leq 0$$

Αν $h(f(0)) = 0$ η h έχει ρίζα το $f(0)$

Αν $h(f(0)) < 0$ στο διάστημα $[0, f(0)]$ για την συνάρτηση h ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και άρα η h έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, f(0))$

- Αν $f(0) < 0$. Τότε

$$f(0) < 0 \xRightarrow{f: \text{φθίνουσα}} f(f(0)) \geq f(0) \Rightarrow f(f(0)) - f(0) \geq 0 \Rightarrow h(f(0)) \geq 0$$

Αν $h(f(0)) = 0$ η h έχει ρίζα το $f(0)$

Αν $h(f(0)) > 0$ στο διάστημα $[f(0), 0]$ για την συνάρτηση h ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και άρα η h έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(f(0), 0)$

Επομένως σε κάθε περίπτωση η h έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

Μένει να αποδείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Για αυτό θα αποδείξουμε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1 - 1$

Έστω $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{f: \text{φθίνουσα}} f(x_1) \geq f(x_2) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2 \Rightarrow \boxed{h(x_1) > h(x_2)}$$

Άρα πράγματι η h είναι γνησίως φθίνουσα και άρα $1 - 1$

Οπότε τελικά υπάρχει ένα ακριβώς κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με την ευθεία $y = x$, την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου