

10.50

Θεωρούμε την συνάρτηση  $f : [9, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 1$

Η συνάρτηση  $f$

είναι συνεχής στο διάστημα  $[9, 10]$ , ως πράξεις συνεχών

$$f(9) = \sqrt{9} - \sqrt[3]{9} - 1 = 2 - \sqrt[3]{9} \stackrel{\sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{8} \Rightarrow \sqrt[3]{9} > 2}{\Rightarrow} \boxed{f(9) < 0}$$

$$f(10) = \sqrt{10} - \sqrt[3]{10} - 1. \text{ Είναι } \boxed{f(10) > 0} \text{ διότι}$$

$$f(10) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{10} - \sqrt[3]{10} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{10} - 1 > \sqrt[3]{10} \stackrel{\text{υψώνουμε στον κύβο}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{10} - 1)^3 > (\sqrt[3]{10})^3 \Leftrightarrow (\sqrt{10} - 1)^3 > (\sqrt[3]{10})^3 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{10}^3 - 3\sqrt{10}^2 + 3\sqrt{10} - 1 > 10 \stackrel{\sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}}{\Leftrightarrow} 13\sqrt{10} - 31 > 10 \Leftrightarrow 13\sqrt{10} > 41 \stackrel{\text{υψώνουμε στο τετράγωνο}}{\Leftrightarrow}$$

$$(13\sqrt{10})^2 > 41^2 \Leftrightarrow 1690 > 1681 \text{ που ισχύει}$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (9, 10)$  τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow \sqrt{x_0} - \sqrt[3]{x_0} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{x_0} = \sqrt[3]{x_0} + 1}$$