

10.5 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + x^2 - x - 3$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 + 0^2 - 0 - 3 = -3 < 0 \\ f(2) &= 2^3 + 2^2 - 2 - 3 = 7 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(2) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{\xi^3 + \xi^2 - \xi - 3 = 0}$$

10.5 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^5 - 3x - 1$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^5 - 3 \cdot 1 - 1 = -3 < 0 \\ f(2) &= 2^5 - 3 \cdot 2 - 1 = 25 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1)f(2) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$x_0^5 - 3x_0 = 1$$

10.5 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 1]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2) + 1 = -17 < 0 \\ f(1) &= 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2)f(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (-2, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(c) = 0 \Rightarrow \boxed{c^3 + c = 2c^2 - 1}$$

10.5 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 2$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 1]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^4 - (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 2 = 16 > 0 \\ f(1) &= 1^4 - 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = -2 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2)f(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (-2, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\gamma) = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma^4 - \gamma^3 = \gamma^2 - \gamma + 2}$$

10.5 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 4\eta\mu x - 6\sigma\upsilon\nu x + 5$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 4\eta\mu 0 - 6\sigma\upsilon\nu 0 + 5 = -1 < 0 \\ f(\pi) &= 4\eta\mu\pi - 6\sigma\upsilon\nu\pi + 5 = 6 + 5 = 11 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(\pi) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = 0 \Rightarrow 4\eta\mu\xi - 6\sigma\upsilon\nu\xi + 5 = 0 \Rightarrow 4\eta\mu\xi - 6\sigma\upsilon\nu\xi = -5 \Rightarrow \boxed{2\eta\mu\xi - 3\sigma\upsilon\nu\xi = -\frac{5}{2}}$$

10.5 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 4\epsilon\phi x - 3\sigma\phi x - \sqrt{2}$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 4\epsilon\phi\frac{\pi}{4} - 3\sigma\phi\frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 4\epsilon\phi\frac{\pi}{3} - 3\sigma\phi\frac{\pi}{3} - \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow 4\epsilon\phi x_0 - 3\sigma\phi x_0 - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \boxed{4\epsilon\phi x_0 - 3\sigma\phi x_0 = \sqrt{2}}$$